

TD - Complexes $\mathbb{C}$

BCPST 1

Feuille d'exercice

Année 2022- 2023

Forme algébrique

Exercice 1 : (En 1 minute) Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

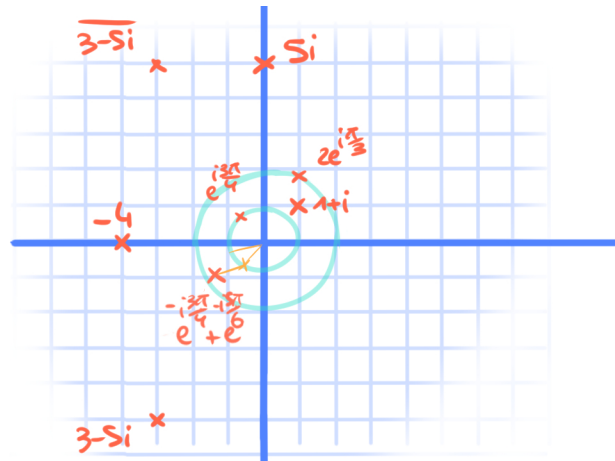
- 1) $(1+i)(1+2i)$ 2) $(1+i)^2$ 3) $\frac{1}{1+i}$ 4) $\frac{i}{3+2i}$ 5) $\overline{1+3i}$ 6) $1+5i+\overline{2+6i}$
 7) $(\overline{1+3i})(2+2i)$ 8) $e^{i\frac{\pi}{4}}$ 9) $e^{i\frac{-5\pi}{6}}$ 10) $2e^{i\frac{11\pi}{3}}$ 11) $ie^{1+i\frac{\pi}{3}}$ 12) $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{-\pi}{4}}$

- Réponses : 1) $-1+3i$ 2) $2i$ 3) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ 4) $\frac{2}{13} + \frac{3}{13}i$ 5) $1-3i$ 6) $3-i$ 7) $8-4i$
 8) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ 9) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ 10) $1 - \sqrt{3}i$ 11) $\frac{-e\sqrt{3}}{2} + \frac{e}{2}i$ 12) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} + \frac{1-\sqrt{2}}{2}i$

Exercice 2 : (Géométrie) Placer sur un graphe les nombres complexes suivants :

- 1) $1+i$ 2) $5i$ 3) -4 4) $3-5i$ 5) $\overline{3-5i}$ 6) $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ 7) $e^{i\frac{3\pi}{4}}$ 8) $e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{\pi}{6}}$

Réponses :



Conjugué, Module

Exercice 3 : (En 1 minute) Calculer les modules des nombres complexes suivants :

- 1) $2i$ 2) -4 3) $\frac{-126i}{5}$ 4) $1+i$ 5) $4+4i$ 6) $5e^{i\frac{\pi}{4}}$ 7) $e^{i\frac{\pi}{7}} \cdot e^{i\frac{\pi}{11}}$ 8) $i(\overline{1-4i})$
 9) $\frac{i}{3+4i}$ 10) $\frac{1+i}{1-i}$ 11) $(1+i)^2$ 12) $(9+12i)^3$ 13) $\frac{(2+i)ie^{i\frac{\pi}{9}}}{1-2i}$ 14) $e^{5+i\frac{\pi}{2}}$

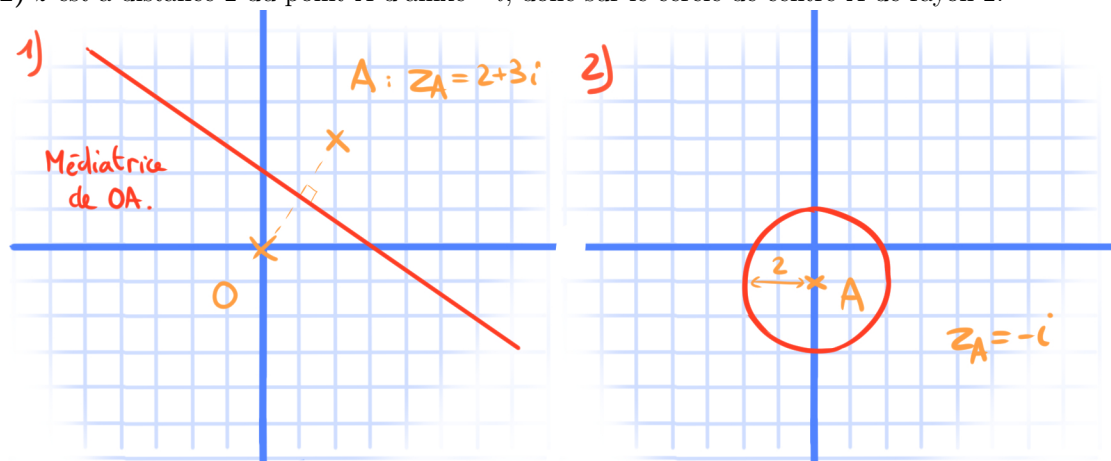
- Réponses : 1) $|2i| = 2$ 2) $|-4| = 4$ 3) $|\frac{-126i}{5}| = \frac{126}{5}$ 4) $|1+i| = \sqrt{2}$ 5) $|4+4i| = 4\sqrt{2}$
 6) $|5e^{i\frac{\pi}{4}}| = 5$ 7) $|e^{i\frac{\pi}{7}} \cdot e^{i\frac{\pi}{11}}| = 1$ 8) $|i(\overline{1-4i})| = \sqrt{17}$ 9) $|\frac{i}{3+4i}| = \frac{1}{5}$ 10) $|\frac{1+i}{1-i}| = 1$
 11) $|(1+i)^2| = 2$ 12) $|(9+12i)^3| = 15^3 = 3375$ 13) $|\frac{(2+i)ie^{i\frac{\pi}{9}}}{1-2i}| = 1$ 14) $|e^{5+i\frac{\pi}{2}}| = e^5$

Exercice 4 : Dessiner sur un graphique l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ qui vérifient les propriétés suivantes :

- 1) $|z| = |z-2-3i|$ 2) $|z+i| = 2$ 3) $|\overline{z}+i| = 2$ 4) $|z^2| = |z|$.

Réponses : 1) z doit être à même distance de 0 que de A d'affixe $2 + 3i$. Il est donc sur la médiatrice du segment OA .

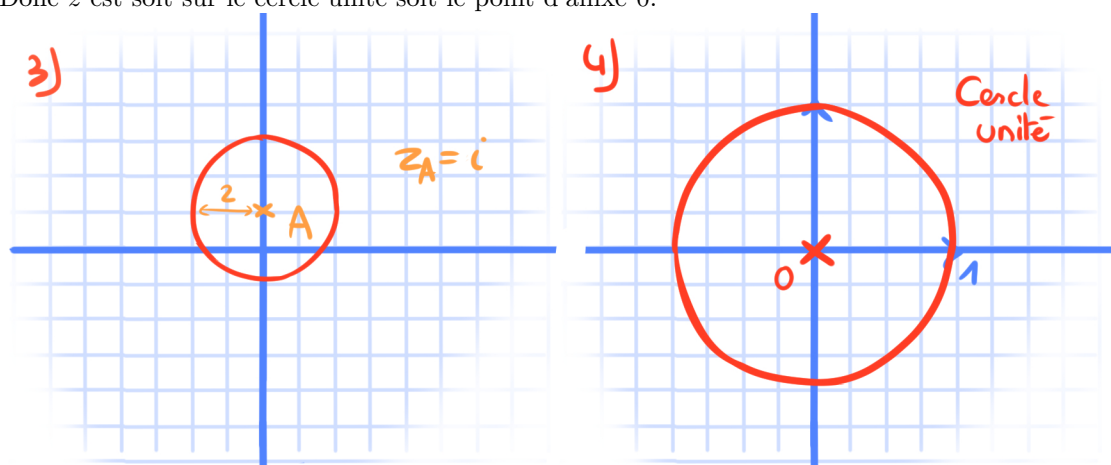
2) z est à distance 2 du point A d'affixe $-i$, donc sur le cercle de centre A de rayon 2.



3) $|\bar{z} + i| = |z - i|$ donc c'est la même chose que la question précédente, avec seulement l'affixe du point A qui est égale à i cette fois.

4) $|z^2| = |z| \iff |z|^2 = |z| \iff |z| = 1$ ou $|z| = 0$.

Donc z est soit sur le cercle unité soit le point d'affixe 0.



Exercice 5 : (Réel ou Imaginaire ?) Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Pour tout z_1, z_2 , Les nombres suivants sont ils réels ou imaginaires purs ou ni l'un ni l'autre ?

- 1) $z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2$ 2) $z_1 \bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2$ 3) $z_1 \bar{z}_1 - z_2 \bar{z}_2$ 4) $z_1 z_2 - \bar{z}_1 \bar{z}_2$ 5) $z_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot \bar{z}_1 \cdot z_1$
 6) $i|z_1 + z_2|$ 7) $(z_1 + z_2)(z_1 - z_2)$ 8) $(z_1 + \bar{z}_2)(\bar{z}_1 - z_2)$ 9) $(z_1 - \bar{z}_2)(\bar{z}_1 - z_2)$
 10) $e^{z_1} e^{z_2} + e^{\bar{z}_1} e^{\bar{z}_2}$

Réponses : 1) Réel 2) Imaginaire 3) Réel 4) Imaginaire 5) Réel
 6) Imaginaire

7) Aucun des deux par exemple si $z_2 = 0$ et $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ on a $(z_1 + z_2)(z_1 - z_2) = z_1^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ni réel ni imaginaire.

8) Aucun des deux. Par exemple si $z_1 = 1$ et $z_2 = 2i$ alors $(z_1 + \bar{z}_2)(\bar{z}_1 - z_2) = (1 - 2i)^2 = -3 + 4i$ ni réel, ni imaginaire

9) Réel 10) Réel

Exercice 6 : (Inégalité triangulaire) 1) Rappeler l'énoncé de l'inégalité triangulaire.

2) Montrer que $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$

3) On suppose que $z_2 \neq 0$. Montrer que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid z_1 = \lambda z_2$

Réponses : 1) $\forall x, y \in \mathbb{C}, |x+y| \leq |x|+|y|$

2) On utilise l'inégalité triangulaire : si $x, y \in \mathbb{C}$ alors $|x+y| \leq |x|+|y|$. On pose $x = z_1 - z_2$ et $y = z_2$, on obtient alors $|x+y| \leq |x|+|y| \iff |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2| \iff |z_1| \leq |z_1 - z_2| + |z_2| \iff |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$ (*). Par ailleurs, en intervertissant les rôles de z_1 et de z_2 dans le raisonnement précédent, on obtient aussi l'inégalité $|z_2| - |z_1| \leq |z_2 - z_1|$ que l'on peut réécrire ainsi :

$$|z_2| - |z_1| \leq |z_2 - z_1| \iff -(|z_1| - |z_2|) \leq |z_1 - z_2| \iff |z_1| - |z_2| \geq -|z_1 - z_2| \quad (**)$$

En groupant les résultats (*) et (**) on trouve $-|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| \iff \boxed{||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|}$.

3) Si on a $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$, comme dans la preuve de l'inégalité triangulaire, on peut tout élever au carré. Cela donne : $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})$ et $(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|$.

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| &\iff |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \\ &\iff 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) = 2|z_1||z_2| \\ &\iff \operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) = |z_1||z_2| \\ &\iff \operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) = |z_1\overline{z_2}| \end{aligned}$$

Par ailleurs, on rappelle (cours) que $\operatorname{Re}(z) = |z| \iff z \in \mathbb{R}$. On a donc dans notre cas $z_1\overline{z_2} \in \mathbb{R}$, on a qu'à noter $z_1\overline{z_2} = \alpha \in \mathbb{R}$. Comme $z_2 \neq 0$, on peut diviser. On a donc $z_1 = \frac{\alpha}{z_2} = \frac{\alpha}{|z_2|^2} z_2$. Si on pose $\lambda = \frac{\alpha}{|z_2|^2} \in \mathbb{R}$

alors on trouve bien $\boxed{z_1 = \lambda z_2}$

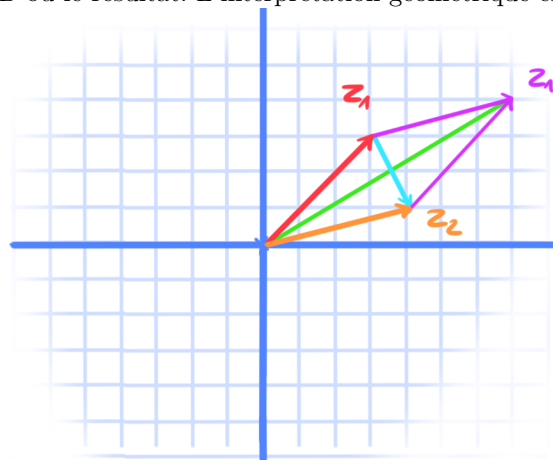
Exercice 7 : (Identité du parallélogramme) Montrer que $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad \frac{1}{2}(|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2) = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

Interpréter géométriquement ces conditions.

Réponse : Il faut écrire les modules à l'aide des conjugués et ça tombe tout seul :

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) \\ &= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \\ &= 2z_1\overline{z_1} + 2z_2\overline{z_2} \\ &= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \end{aligned}$$

D'où le résultat. L'interprétation géométrique est la suivante :



$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

On obtient une relation entre les longueurs des côtés d'un parallélogramme et ses diagonales.

Forme trigonométrique / exponentielle

Exercice 8 : (En 1 minute) Mettre sous forme trigonométrique, puis sous forme exponentielle les nombres suivants :

- 1) 1 2) $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ 3) $-1 - \sqrt{3}i$ 4) $\sqrt{3} - \sqrt{3}i$ 5) $-5i$ 6) -32

7) $\cos(1) - i \sin(1)$ 8) $\frac{1}{\cos(1) + i \sin(1)}$ 9) $\frac{2}{\sqrt{3} + 3i}$ 10) $(1 + i)^2$ 11) $(1 + i)^3$
 12) $e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$ 13) $ie^{1+i\frac{\pi}{3}}$ 14) $-e^{\ln 2 + i\frac{\pi}{7}}$ 15) $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{-\pi}{3}}$

Réponse : Je les mets uniquement sous forme exponentielle :

1) e^{i0} 2) $2e^{i\frac{-\pi}{4}}$ 3) $2e^{i\frac{-2\pi}{3}}$ 4) $\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$ 5) $5e^{i\frac{-\pi}{2}}$ 6) $32e^{-i\pi}$
 7) e^{-i} 8) e^{-i} 9) $\frac{4}{\sqrt{3}}e^{i\frac{-\pi}{3}}$ 10) $2e^{i\frac{\pi}{2}}$ 11) $2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$
 12) $e^{i\frac{7\pi}{12}}$ 13) $e \cdot e^{i\frac{5\pi}{6}}$ 14) $2e^{i\frac{8\pi}{7}}$ 15) e^{i0}

Exercice 9 : Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, sous forme trigonométrique $z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1))$ et $z_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2))$. Ecrire sous forme trigonométrique les nombres suivants :

1) $z_1 \cdot z_2$ 2) $\frac{z_1}{z_2}$ 3) e^{z_1} 4) $e^{z_1 + z_2}$.

Réponse : 1) $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$ 2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2))$
 3) $e^{z_1} = e^{r_1 \cos \theta_1} (\cos(r_1 \sin \theta_1) + i \sin(r_1 \sin \theta_1))$
 4) $e^{z_1 + z_2} = e^{r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2} (\cos(r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2) + i \sin(r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2))$

Exercice 10 : On pose $z = re^{i\theta}$ et $E = \{|z + e^{i\varphi}| \mid \varphi \in \mathbb{R}\}$

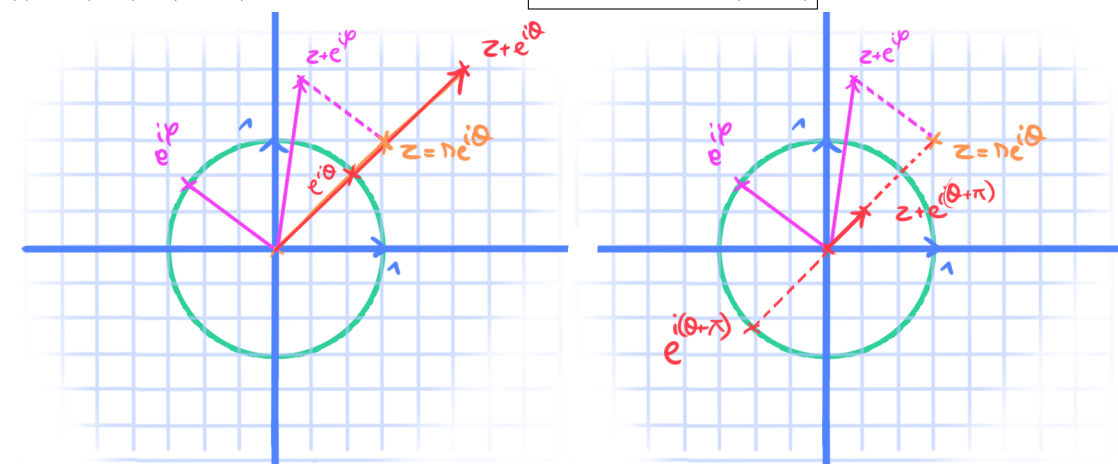
- 1) Justifier que E est borné.
- 2) Calculer ses bornes supérieure et inférieure (on précisera s'il s'agit de minimum ou de maximum)

Réponse : 1) Déjà E est minoré par 0 car $|z + e^{i\varphi}| \geq 0$ pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, d'après l'inégalité triangulaire, on a $\forall \varphi \in \mathbb{R}$:

$|z + e^{i\varphi}| < |z| + |e^{i\varphi}| = r + 1$. Donc $r + 1$ est un majorant de E . On a donc E borné.

2) Pour la borne supérieure, on peut remarquer en faisant un schéma que pour $\varphi = \theta$, on atteint le majorant $r + 1$. On a $|z + e^{i\theta}| = |re^{i\theta} + e^{i\theta}| = |(r + 1)e^{i\theta}| = r + 1$. Donc $\boxed{\max E = \sup E = r + 1}$.

Pour la borne inf, on fait pareil, en utilisant l'autre inégalité triangulaire : on a $|z + e^{i\varphi}| \geq ||z| - |e^{i\varphi}|| = |r - 1|$. On peut encre voir sur un schéma que poser $\varphi = \theta + \pi$ va fonctionner : on a $|z + e^{i(\theta + \pi)}| = |re^{i\theta} - e^{i\theta}| = |(r - 1)e^{i\theta}| = |r - 1|$. Finalement, on trouve $\boxed{\min E = \inf E = |r - 1|}$



Exercice 11 : (linéarisation) Linéariser les formes suivantes :

1) $\sin^3 x$ 2) $\cos^5 x$ 3) $\cos^3 x \cdot \sin x$ 4) $\cos^2 x \cdot \sin^2 x$. 5) $\cos x \cdot \sin^4 x$.

$$\begin{aligned}
1) \sin^3 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 = \frac{i}{8} (e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}) \\
&= \frac{i}{8} ((e^{3ix} + e^{-3ix}) - 3(e^{ix} - e^{-ix})) \\
&= \frac{i}{8} (2i \sin(3x) - 6i \sin x) \\
&= \frac{-1}{4} (\sin 3x - 3 \sin x)
\end{aligned}$$

Finalement $\boxed{\sin^3 x = \frac{-1}{4} \sin(3x) + \frac{3}{4} \sin x}$

$$\begin{aligned}
2) \cos^5 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^5 = \frac{1}{32} (e^{5ix} + 5e^{3ix} + 10e^{ix} + 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} + e^{-5ix}) \\
&= \frac{1}{32} ((e^{5ix} + e^{-5ix}) + 5(e^{3ix} + e^{-3ix}) + 10(e^{ix} + e^{-ix})) \\
&= \frac{1}{32} (2 \cos 5x + 10 \cos 3x + 20 \cos x) \\
&= \frac{1}{16} (\cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x)
\end{aligned}$$

Finalement $\boxed{\cos^5 x = \frac{1}{16} \cos 5x + \frac{5}{16} \cos 3x + \frac{5}{8} \cos x}$

$$\begin{aligned}
3) \cos^3 x \cdot \sin x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) = \frac{-i}{16} (e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix})(e^{ix} - e^{-ix}) \\
&= \frac{-i}{16} (e^{4ix} - e^{2ix} + 3e^{2ix} - 3 + 3 - 3e^{-2ix} + e^{-2ix} - e^{-4ix}) \\
&= \frac{-i}{16} ((e^{4ix} - e^{-4ix}) + 2(e^{2ix} - e^{-2ix})) \\
&= \frac{-i}{16} (2i \sin 4x + 4i \sin 2x) \\
&= \frac{1}{8} (\sin 4x + 2 \sin 2x)
\end{aligned}$$

Finalement $\boxed{\cos^3 x \cdot \sin x = \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{4} \sin 2x}$

$$4) \cos^2 x \cdot \sin^2 x = \frac{1}{2} \sin(2x)^2 = \frac{1}{4} (1 - \cos 4x) = \boxed{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 4x}.$$

$$\begin{aligned}
5) \cos x \cdot \sin^4 x &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right) \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^4 = \frac{1}{32} (e^{ix} + e^{-ix})(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}) \\
&= \frac{1}{32} (e^{5ix} + e^{3ix} - 4e^{3ix} - 4e^{ix} + 6e^{ix} + 6e^{-ix} - 4e^{-ix} - 4e^{-3ix} + e^{-3ix} + e^{-5ix}) \\
&= \frac{1}{32} ((e^{5ix} + e^{-5ix}) - 3(e^{3ix} + e^{-3ix}) + 2(e^{ix} + e^{-ix})) \\
&= \frac{1}{32} (2 \cos 5x - 6 \cos 3x + 4 \cos x) \\
&= \frac{1}{16} (\cos 5x - 3 \cos 3x + 2 \cos x)
\end{aligned}$$

Finalement $\boxed{\cos x \cdot \sin^4 x = \frac{1}{16} \cos 5x - \frac{3}{16} \cos 3x + \frac{1}{8} \cos x}$

Exercice 12 : (Formules de Simpson) Pour $p, q \in \mathbb{R}$, montrer les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
1) \cos p + \cos q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} & 2) \cos p - \cos q &= -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \\
3) \sin p + \sin q &= 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} & 4) \sin p - \sin q &= 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}
\end{aligned}$$

.....

$$1) 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} = 2 \left(\frac{e^{i\frac{p+q}{2}} + e^{-i\frac{p+q}{2}}}{2} \right) \left(\frac{e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}}}{2} \right) = \frac{1}{2} (e^{ip} + e^{iq} + e^{-iq} + e^{ip})$$

$$= \frac{1}{2}(2 \cos p + 2 \cos q) = \cos p + \cos q$$

2) 3) 4) Exactement la même méthode.

Résolution d'équations d'ordre 2

Exercice 13 : (*En 1 minute*) Trouver les racines des polynômes suivant, puis les factoriser :

- 1) $x^2 + 2x + 1$ 2) $2x^2 - 6x + 4$ 3) $-3x^2 + 45x - 150$ 4) $x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x + 1$ 5) $2x^2 + 2x + 2$
 6) $(x+1)^2 + x$ 7) $x^2 - 1$ 8) $x^2 + 1$ 9) $5x^2$ 10) $x^2 - 2x$ 11) $x^2 - 2x + 2$

Réponses : 1) $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$; Racine double : -1 2) $2x^2 - 6x + 4 = 2(x-1)(x-2)$ Racines : 1 et 2
 3) $-3x^2 + 45x - 150 = -3(x-10)(x-5)$ Racines : 5 et 10
 4) $x^2 + \sqrt{2}x + 1 = (x - e^{i\frac{\pi}{4}})(x - e^{i\frac{-\pi}{4}})$. Racines : $e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $e^{i\frac{-\pi}{4}}$
 5) $2x^2 + 2x + 2 = 2(x - e^{i\frac{2\pi}{3}})(x - e^{i\frac{-2\pi}{3}})$ Racines $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{-2\pi}{3}}$
 6) $(x+1)^2 + x = x^2 + 3x + 1 = \left(x + \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ Racines : $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$
 7) $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ Racines : 1 et -1 8) $x^2 + 1 = (x-i)(x+i)$ Racines i et $-i$
 9) $5x^2$ déjà factorisé, Racine double : 0 10) $x^2 - 2x = x(x-2)$ Racines : 0 et 2
 11) $x^2 - 2x + 2 = (x-1+i)(x-1-i)$ Racines : $1+i$ et $1-i$.

Exercice 14 : (*En 1 minute*) Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants :

- 1) -2 2) i 3) $-i$ 4) $4-3i$ 5) $\cos(1) + i\sin(1)$ 6) e^{1+2i}

Réponses : 1) $\pm\sqrt{2}i$ 2) $\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ 3) $\pm\frac{1-i}{\sqrt{2}}$
 4) $4-3i$ On résout $\begin{cases} a^2 - b^2 = 4 \\ 2ab = -3 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = \frac{9}{2} \\ b^2 = \frac{1}{2} \\ 2ab = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2ab = -3 \end{cases}$ On a $2ab < 0$ donc a et b
 sont de signe opposés et les racines carrées sont $a+ib = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ou $\frac{-3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
 5) $\cos(1) + i\sin(1)$: les racines sont $\pm e^{\frac{i}{2}}$ 6) e^{1+2i} Les racines sont $\pm\sqrt{e} \cdot e^i$

Exercice 15 : (*Racines carrées plus compliquées*) Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants :

- 1) $5+12i$ 2) $-32+24i$ 3) $-15-8i$ 4) $21-20i$ 5) $48+14i$ 6) $1+2i$

Réponses : Dans les premiers, la difficulté est surtout de calculer le module.

- 1) $|5+12i| = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$ Racines : $\pm(3+2i)$
 2) $|-32+24i| = 8|-4+3i| = 8 \cdot 5 = 40$ Racines : $\pm(2+6i)$
 3) $|-15-8i| = \sqrt{225+64} = \sqrt{289} = 17$ Racines : $\pm(1+4i)$
 4) $|21-20i| = \sqrt{441+400} = \sqrt{841} = 29$ Racines : $\pm(5-2i)$
 5) $|48+14i| = 2|24+7i| = 2\sqrt{576+49} = 2\sqrt{625} = 50$ Racines : $\pm(7+i)$

$$6) 1 + 2i \text{ On résout } \begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ 2ab = 2 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{5} \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ b^2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ 2ab = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \pm \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \\ b = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} \\ ab = 1 \end{cases} \text{ donc } a$$

et b sont de même signe donc on trouve les racines $a + ib = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}$ et $-\sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}}$

Exercice 16 : (Problème) Soit $Z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

- 1) Calculer sous forme algébrique les racines carrées complexes de Z .
- 2) Calculer ces racines carrées sous forme trigonométrique cette fois.
- 3) En déduire une expression de $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.
- 4) Proposer une méthode pour calculer $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$, puis les calculer.

Réponses : 1) On résout $\begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 2ab = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \\ b^2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \\ 2ab = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \iff \begin{cases} a = \pm \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \\ b = \pm \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \\ 2ab = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

$ab > 0$ donc a et b sont de même signe. On en déduit la racine carrée sous forme algébrique $z_1 = a + ib = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$ ou $z_2 = -\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$

2) C'est plus facile. On a $Z = e^{i\frac{\pi}{4}}$ les racines carrées de Z sont donc $\pm e^{i\frac{\pi}{8}}$ sous forme trigonométrique on a donc $e^{i\frac{\pi}{8}}$ et $e^{i\frac{9\pi}{8}}$.

3) On identifie facilement $z_1 = e^{i\frac{\pi}{8}}$ car $\cos \frac{\pi}{8} > 0$ d'après le cercle trigonométrique. On en déduit par

identification de la partie réelle et imaginaire : $\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$

4) On utilise que $e^{i\frac{\pi}{12}}$ est la racine carrée de $e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$. On résout $\begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2ab = \frac{1}{2} \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \\ b^2 = \frac{\sqrt{3} - 1}{4} \\ ab = \frac{1}{4} \end{cases}$

a et b doivent être de même signe, on trouve donc $e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{\sqrt{3} - 1}}{2}$

On en déduit par identification de la partie réelle et imaginaire : $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$ et $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$

Exercice 17 : (Complexes et sommes ★★ - ★★★) Calculer les sommes suivantes en fonction de n :

1) $\sum_{k=0}^n \cos k$ 2) $\sum_{k=0}^n \sin k$ 3) $\sum_{k=0}^{2n} \binom{4n}{2k} (-1)^k$ 4) $\sum_{k=0}^{2n-1} \binom{4n}{2k+1} (-1)^k$

Réponses : 1) et 2) On les met ensemble, on note $C = \sum_{k=0}^n \cos k$ et $S = \sum_{k=0}^n \sin k$.

On a $C + iS = \sum_{k=0}^n \cos k + i \sin k = \sum_{k=0}^n e^{ik} = \frac{1 - e^{(n+1)i}}{1 - e^i} = \frac{e^{\frac{n+1}{2}i}}{e^{\frac{i}{2}}} \cdot \frac{e^{-\frac{n+1}{2}i} - e^{\frac{n+1}{2}i}}{e^{-\frac{i}{2}} - e^{\frac{i}{2}}} = e^{\frac{n}{2}i} \frac{\sin(\frac{n+1}{2})}{\sin(\frac{1}{2})}$

(explication : On reconnaît dans un premier temps une somme géométrique, puis on utilise la technique de l'angle moitié.)

Ainsi $C = \operatorname{Re} \left(e^{\frac{n}{2}i} \frac{\sin(\frac{n+1}{2})}{\sin(\frac{1}{2})} \right)$ et $S = \operatorname{Im} \left(e^{\frac{n}{2}i} \frac{\sin(\frac{n+1}{2})}{\sin(\frac{1}{2})} \right)$ On trouve donc $C = \cos\left(\frac{n}{2}\right) \frac{\sin(\frac{n+1}{2})}{\sin(\frac{1}{2})}$ et $S = \sin\left(\frac{n}{2}\right) \frac{\sin(\frac{n+1}{2})}{\sin(\frac{1}{2})}$

3) et **4)** Sont à faire ensemble aussi. Notons $A = \sum_{k=0}^{2n} \binom{4n}{2k} (-1)^k$ et $B = \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{4n}{2k+1} (-1)^k$.

La forme de A et B fait penser au binôme de Newton. Par ailleurs, A semble contenir les indices paires de la somme et B les indices impaires.

On souhaite reconnaître dans A une somme de termes paires, ainsi on peut faire apparaître $2k$ partout, par exemple en écrivant $(-1)^k = i^{2k}$ et dans B , on peut faire pareil avec les termes impaires, mais pour avoir $2k+1$ il faudra multiplier par i :

On remarque que $A + iB = \sum_{k=0}^{2n} \binom{4n}{2k} (-1)^k + \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{4n}{2k+1} (-1)^k i = \sum_{k=0}^{2n} \binom{4n}{2k} i^{2k} + \sum_{k=0}^{2n-1} \binom{4n}{2k+1} i^{2k+1}$

On remarque ainsi que les deux sommes peuvent être regroupées en une seule car elles parcourent tous les entiers paires et impaires compris entre 0 et $4n$. Ainsi : $A + iB = \sum_{k=0}^{4n} \binom{4n}{k} i^k = (1+i)^{4n} = ((1+i)^4)^n = (-4)^n$.

En conclusion en identifiant la partie réelle et la partie imaginaire, on trouve : $A = (-4)^n$ et $B = 0$

Exercice 18 : (Complexes et intégrales ★★) Calculer les intégrales suivantes :

1) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) e^{\alpha x} dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) e^{\alpha x} dx$. **2)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx$ **3)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx$

Réponses : **1)** On note $C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) e^{\alpha x} dx$ et $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) e^{\alpha x} dx$

On a $C + iS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ix} e^{\alpha x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{(i+\alpha)x} dx = \left[\frac{e^{(i+\alpha)x}}{i+\alpha} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{e^{(i+\alpha)\frac{\pi}{2}} - 1}{i+\alpha} = \frac{(-1 + ie^{\frac{\alpha\pi}{2}})(\alpha - i)}{\alpha^2 - 1} = \frac{\alpha + e^{\frac{\alpha\pi}{2}} - i(\alpha e^{\frac{\alpha\pi}{2}} + 1)}{\alpha^2 + 1}$

En identifiant la partie réelle et imaginaire : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) e^{\alpha x} dx = \frac{\alpha + e^{\frac{\alpha\pi}{2}}}{\alpha^2 + 1}$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) e^{\alpha x} dx = -\frac{\alpha e^{\frac{\alpha\pi}{2}} + 1}{\alpha^2 + 1}$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx$. On utilise la linéarisation de l'exercice 11 :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{16} \cos 5x + \frac{5}{16} \cos 3x + \frac{5}{8} \cos x dx \\ &= \frac{1}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 5x dx + \frac{5}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x dx + \frac{5}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\ &= \frac{1}{16} \left[\frac{1}{5} \sin 5x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{5}{16} \left[\frac{1}{3} \sin 3x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{5}{8} \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{16} \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi}{2} + \frac{5}{16} \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{2} + \frac{5}{8} \sin \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2 \cdot 5} - \frac{5}{2 \cdot 3} + 5 \right) = \frac{1}{8} \cdot \frac{3 - 25 + 150}{30} = \frac{1}{8} \cdot \frac{128}{30} = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

Ainsi $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx = \frac{8}{15}$

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx$ Il faut déjà linéariser $\sin^6 x$:

$$\begin{aligned}
\sin^6 x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^6 = \frac{-1}{64} (e^{6ix} - 6e^{4ix} + 15e^{2ix} - 20 + 15e^{-2ix} - 6e^{-4ix} + e^{-6ix}) \\
&= \frac{-1}{64} ((e^{6ix} + e^{-6ix}) - 6(e^{4ix} + e^{-4ix}) + 15(e^{2ix} + e^{-2ix}) - 20) \\
&= -\frac{1}{64} (2 \cos 6x - 12 \cos 4x + 30 \cos 2x - 20) \\
&= \frac{-1}{32} \cos 6x + \frac{3}{16} \cos 4x - \frac{15}{32} \cos 2x + \frac{5}{16} \\
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \, dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-1}{32} \cos 6x + \frac{3}{16} \cos 4x - \frac{15}{32} \cos 2x + \frac{5}{16} \, dx \\
&= \frac{-1}{32} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 6x \, dx + \frac{3}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4x \, dx + \frac{15}{32} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \, dx + \frac{5}{16} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx \\
&= \frac{-1}{32} \left[\frac{1}{6} \sin 6x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{16} \left[\frac{1}{4} \sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{15}{32} \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{5}{16} \cdot \frac{\pi}{2} \\
&= 0 + 0 + 0 + \frac{5\pi}{32}
\end{aligned}$$

Ainsi $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \, dx = \frac{5\pi}{32}$

Résolution d'équations trigonométriques

Exercice 19 : (*Application directe*) ★ - ★★ Résoudre les équations suivantes d'inconnue θ :

1) $\cos \theta + \sin \theta = 1$ 2) $3 \cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta = \sqrt{6}$ 3) $\cos \theta - 2 \sin \theta = 4$ 4) $\cos \theta - \sin \theta = \frac{1}{2}$

Réponses :

$$\begin{aligned}
1) \cos \theta + \sin \theta = 1 &\iff \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \right) = 1 \\
&\iff \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos \theta + \sin \frac{\pi}{4} \sin \theta \right) = 1 \\
&\iff \cos \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid \theta - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } \theta - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid \theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } \theta = 2k\pi
\end{aligned}$$

Donc $S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\}$

$$\begin{aligned}
2) 3 \cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta = \sqrt{6} &\iff 2\sqrt{3} \left(\frac{3}{2\sqrt{3}} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \sin \theta \right) = \sqrt{6} \\
&\iff 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{-\pi}{6} \cos \theta + \sin \frac{-\pi}{6} \sin \theta \right) = \sqrt{6} \\
&\iff \cos \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid \theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } \theta + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\
&\iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid \theta = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } \theta = \frac{-5\pi}{12} + 2k\pi
\end{aligned}$$

Donc $S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{12} + 2k\pi, \frac{-5\pi}{12} + 2k\pi \right\}$

3) $\cos \theta - 2 \sin \theta = 4$.

En analysant le problème, on remarque que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos \theta \leq 1$ et $-2 \sin \theta \leq 2$ ainsi $\cos \theta - 2 \sin \theta \leq 3$.
Donc il n'y a aucune solution sur $\mathbb{R}$. Ainsi $\boxed{S = \emptyset}$

$$\begin{aligned}
 4) \cos \theta - \sin \theta = \frac{1}{2} &\iff \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \right) = 1 \\
 &\iff \sqrt{2} \left(\cos \frac{-\pi}{4} \cos \theta + \sin \frac{-\pi}{4} \sin \theta \right) = 1 \\
 &\iff \cos \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \\
 &\iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid \theta + \frac{\pi}{4} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi \text{ ou } \theta + \frac{\pi}{4} = -\arccos \frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi \\
 &\iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid \theta = -\frac{\pi}{4} + \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi \text{ ou } \theta = -\frac{\pi}{4} - \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi
 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ -\frac{\pi}{4} + \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi, -\frac{\pi}{4} - \arccos \frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi \right\}}$

Exercice 20 : ★★★ Résoudre $\sin^2 \theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta) = 1$

1) L'idée est d'essayer de se ramener aux situations de l'exercice 19. Pour cela, au lieu de factoriser, comme on en a l'intuition, il faut plutôt linéariser l'équation.

On peut utiliser les formules d'Euler ou la formule $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta \implies \sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$

Ainsi : $\sin^2 \theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) + \frac{1}{2} \sin 2\theta$. Ensuite on résout normalement :

$$\begin{aligned}
 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta) = 1 &\iff \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) + \frac{1}{2} \sin 2\theta = 1 \\
 &\iff -\frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta = \frac{1}{2} \\
 &\iff -\cos 2\theta + \sin 2\theta = 1 \\
 &\iff \sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2\theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\theta \right) = 1 \\
 &\iff \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} \cos \theta + \sin \frac{3\pi}{4} \sin \theta \right) = 1 \\
 &\iff \cos \left(2\theta - \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 &\iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid 2\theta - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } 2\theta - \frac{3\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\
 &\iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid 2\theta = \pi + 2k\pi \text{ ou } 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\
 &\iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi
 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}}$

Exercice 21 : ★ - ★★★ Soit $E = \{3 \cos \theta - 4 \sin \theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$

1) Montrer que E est borné. 2) Calculer $\sup E$ et $\inf E$.

1) Méthode 1 : Majorant et Minorant

On a $-1 \leq \cos \theta \leq 1 \implies -3 \leq 3 \cos \theta \leq 3$ (1)

et $-1 \leq \sin \theta \leq 1 \implies -4 \leq 4 \sin \theta \leq 4 \implies -4 \leq -4 \sin \theta \leq 4$ (2)

Donc en faisant (1)+(2), on trouve : $-7 \leq 3 \cos \theta - 4 \sin \theta \leq 7$. Donc E est majoré par 7 et minoré par -7 donc borné.

Méthode 2 : Majorant de la valeur absolue (plus rapide)

On a $\underbrace{|3 \cos \theta - 4 \sin \theta| \leq |3 \cos \theta| + |-4 \sin \theta|}_{\text{par inégalité triangulaire}} \leq 3|\cos \theta| + 4|\sin \theta| \leq 3 + 4 \leq 7$.

Donc les valeurs absolues des éléments de E sont majorées par 7 et E est borné.

2) Si on pose $z = 3 - 4i$ alors $|z| = 5$ donc $z = 5e^{i\varphi}$ sous forme exponentielle. On en déduit que :
 $3 \cos \theta - 4 \sin \theta = 5 \cos \varphi \cos \theta + 5 \sin \varphi \sin \theta = 5 \cos(\theta - \varphi)$

Ainsi $-5 \leq 5 \cos(\theta - \varphi) \leq 5 \implies -5 \leq 3 \cos \theta - 4 \sin \theta \leq 5$.

5 est donc un majorant de E et -5 un minorant de E .

Par ailleurs, pour $\theta = \varphi$, on a $3 \cos \theta - 4 \sin \theta = 5 \cos(\theta - \varphi) = 5 \cos 0 = 5 \in E$ pour $\theta = \varphi + \pi$, on a $3 \cos \theta - 4 \sin \theta = 5 \cos(\theta - \varphi) = 5 \cos \pi = -5 \in E$

Ainsi $\boxed{\max E = \sup E = 5 \text{ et } \min E = \inf E = -5}$.
