DM1: à rendre le vendredi 3 Octobre 2025

- Le premier exercice est à faire si vous avez eu moins de 9 lors du premier devoir, sinon il est facultatif.
- Pour les deux premiers exercices (seulement le second si vous avez eu plus de 9), vous devez chercher et rédiger par vous même la solution.
- Pour le troisième exercice, vous pouvez (et vous êtes même encouragés) le chercher à plusieurs (deux ou trois) et dans ce cas rendre une seule solution par groupe et il suffit d'indiquer les élèves du groupe sur la copie rendant le troisième exercice.
- Si vous voulez que je corrige votre DM avant le DS2 de maths, vous pouvez me le rendre lundi 22 septembre.

Exercice 1 : pot pourri de questions de sup

1. Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $x \mapsto \sin(\ln(1+x))$
2. Calculer le n-ième de la suite $(u_n)_n$ où $u_{n+2} = -3u_{n+1} + 10u_n$ et $u_0 = u_1 = 1$.
3. Calculer, pour $n \geqslant 3$, $\sum\limits_{k=1}^{n-2} \binom{n}{k+2}(-1)^k 2^{k+3}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, à l'aide du théorème de la bijection, montrer que l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{nx} + \arctan(x) = 2$ possède une et une seule solution sur $\mathbb{R}$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{nx} + \arctan(x) = -3$ possède-t-elle une solution ?
6. À l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, démontrer que l'équation $\cos(x) = x$ possède au moins une solution.

Exercice 2 : des séries à binge-watcher

1. Étudier la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ et déterminer sa somme le cas échéant.
2. À l'aide d'une majoration, montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\cos(\mathrm{e}^n)}{3n^2-n+2}$ converge.
3. À l'aide d'un équivalent, étudier la convergence de $\sum \dfrac{n^5+\ln(n)}{2n^7+n(-1)^n}$
4. À l'aide d'un développement limité, étudier la convergence de $\sum \left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right)$.

Exercice 3 : un problème à deux balles

Pour n un entier supérieur ou égale à 3, on pose, $f_n : \left\{\begin{array}{ccc} [\,0\,;1\,] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} n^2x & \text{si} \quad x \in \left[0\,;\dfrac{1}{n}\right] \\ 2n-n^2x & \text{si} \quad x \in \left]\dfrac{1}{n}\,;\dfrac{2}{n}\right] \\ 0 & \text{si} \quad x \in \left]\dfrac{2}{n}\,;1\right] \end{cases} \end{array}\right.$

1. Écrire (sur votre copie mais aussi sur l'ordinateur) une fonction Python nommée `fn(n,x)` qui renvoie la valeur de $f_n(x)$, puis donner une commande qui affiche le graphe de f_3, f_4 et f_4 sur $[0;1]$. On découpera $[0;1]$ en mille intervalles et on affichera les points obtenus. Puis recopier les tracés de f_3, f_4 et f_5 obtenus sur trois figures différentes.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
3. Soit $x \in [0;1]$ fixé, calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.
4. Est-ce que $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ sont égaux ?
5. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\pi]$, à l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
6. On pose, pour $x \in [0;\pi]$, $S_n(x) = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(kx)$, Démontrer, à l'aide des nombres complexes, que pour $x \in]0;\pi]$, $S_n(x) = \dfrac{\sin((2n+1)x/2)}{2\sin(x/2)}$
7. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, à l'aide de deux intégrations par parties, calculer $\displaystyle\int_0^\pi (ax^2+bx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$.
8. En déduire une valeur de a et une de b telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^\pi (ax^2+bx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n^2}$.
9. On considère maintenant a et b les réels trouvés à la question précédente. En déduire que
$$\int_0^\pi (ax^2+bx)S_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} - \frac{\pi^2}{6}$$
10. On pose $f(x) = \dfrac{ax^2+bx}{2\sin(x/2)}$, à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 en 0, démontrer que f est prolongeable par continuité en 0 et que $\tilde{f}$, son prolongement, est dérivable en 0.
11. Puis démontrer que $\tilde{f}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;\pi]$.
12. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$