

TD 9-10 - Systèmes et Matrices

1BCPST 2

Feuille d'exercice

Année 2025- 2026

Systèmes

Exercice 1 : ♡ : Résoudre les systèmes suivants et donner leurs rangs :

$$\begin{array}{lll}
 1) \begin{cases} x+y=2 \\ -x+y=1 \end{cases} & 2) \begin{cases} x+y=2 \\ -2x-2y=6 \end{cases} & 3) \begin{cases} 2x+3y=10 \\ -3x+5y=2 \end{cases} & 4) \begin{cases} x+y=0 \\ x-z=1 \end{cases} & 5) \begin{cases} 2x+3y+t=3 \\ 3x+4y-z=2 \end{cases} \\
 6) \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ x+z=1 \end{cases} & 7) \begin{cases} x+z=1 \\ 2x+y=2 \\ x+y-z=0 \end{cases} & 8) \begin{cases} x+2y+3z=12 \\ y+2z=5 \\ z=2 \end{cases} & 9) \begin{cases} x-y+2z=1 \\ x+y-3z=1 \\ x-z=2 \end{cases}
 \end{array}$$

Exercice 2 : ★ - ★★ (*Autres systèmes*) : Résoudre les systèmes suivants et donner leurs rangs :

$$\begin{array}{lll}
 1) \begin{cases} \frac{x}{2}+y=1 \\ \frac{y}{4}+z=\frac{1}{3} \\ \frac{2x}{7}+z=1 \end{cases} & 2) \begin{cases} x+y=i \\ x+y+iz=1 \\ ix-y+z=1+i \end{cases} & 3) \begin{cases} \sqrt{2}x+y=\sqrt{2} \\ x+\sqrt{3}y-2\sqrt{3}z=0 \\ \sqrt{10}x-y+z=\sqrt{5} \end{cases} & 4) \begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x-y+z-t=1 \\ 2x+y-3z+t=3 \end{cases} \\
 5) \begin{cases} x+2y-z+t+w=1 \\ x+y-z-t-w=2 \\ x+y-w=-1 \end{cases} & 6) \begin{cases} x+y+z+t=1 \\ -x+y+z+t=1 \\ -2y+z+t=1 \\ 3z-t=1 \end{cases} & 7) \begin{cases} x+2y+3z-t+w=2 \\ x-y+z+t-2w=4 \\ x+2y+z+t-w=-1 \\ x+2y-2z+t+3w=2 \end{cases}
 \end{array}$$

Exercice 3 : ★★ - ★★★ (*Avec des paramètres*) : Résoudre les systèmes suivants et donner le rang en fonction des paramètres :

$$\begin{array}{ll}
 1) \begin{cases} mx+y-z=1 \\ x-my+z=m^2 \\ 2x+y+z=(m+1)^2 \end{cases} \text{ où } m \in \mathbb{R} & 2) \begin{cases} x+y+(1-m)z=m+2 \\ (1+m)x-y+2z=0 \\ 2x-my+3z=m+2 \end{cases} \text{ où } m \in \mathbb{R} \\
 3) \begin{cases} ax+by+z=1 \\ x+aby+z=b \\ x+by+az=1 \end{cases} \text{ où } a, b \in \mathbb{R}
 \end{array}$$

Matrices

Exercice 4 : ♡ (*En 1 minute*) : On définit les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R}); F = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Calculer les produits matriciels suivants (s'ils ont un sens) et préciser si la matrice obtenue est symétrique :

$$\begin{array}{llllllllll}
 1) AB & 2) BA & 3) A^t B & 4) A^2 & 5) {}^t AA & 6) A^3 & 7) B^2 & 8) {}^t BB & 9) B^t B & 10) BC \\
 11) DC & 12) BD & 13) D^2 & 14) {}^t CB & 15) EA & 16) A^t E & 17) EB & 18) F^2 & 19) {}^t FF.
 \end{array}$$

Exercice 5 : ♡ - ★ (*Rang*) : Calculer le rang des matrices suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 1) (0 \ 1 \ 5 \ 6 \ 7) & 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & 3) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} & 4) \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 8 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} & 5) \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & 8 & 1 & 5 \end{pmatrix} \\
 6) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 8 & 7 \\ -2 & 4 & -10 & -16 & -14 \end{pmatrix} & 7) \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix} & 8) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 8 & -3 \\ 2 & -8 & -1 & -6 \\ -2 & -4 & -6 & -2 \end{pmatrix} & 9) \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 8 & 2 \\ 4 & 7 & -3 & 2 \\ -1 & 14 & -13 & 7 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Exercice 6 : ★★ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Montrer qu'il existe un unique couple $(S, A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = S + A$.

Exercice 7 : ★ (Trace) Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la somme de ses coefficients diagonaux est appelée "Trace de M" :

$$\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^n m_{i,i}$$

- 1) Montrer que $\text{Tr}(A + \lambda B) = \text{Tr}(A) + \lambda \text{Tr}(B)$ et $\text{Tr}({}^t M) = \text{Tr}(M)$.
- 2) Montrer que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$

Exercice 8 : ★★ : Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 : $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

- 1) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer J^k . 2) Calculer $(I_n + J)^k$
- 3) trouver une matrice R telle que $R^2 = J$
- 4) Plus généralement pour $k \in \mathbb{N}^*$, trouver une matrice R telle que $R^k = J$.

Inverse

Exercice 9 : ♡ (*Inverse rapide*) Dire si ces matrices sont inversibles et si oui calculer leur inverse :

- 1) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$
- 7) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 9) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 10) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 11) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$

Exercice 10 : ★ - ★★ (*Calcul d'inverse*) Inverser les matrices suivantes :

- 1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -5 & 10 & 15 \\ 5 & 15 & 10 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- 5) $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -2\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 7) $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$

Exercice 11 : ★★ Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible et calculer

son inverse.

Exercice 12 : ★★ (Matrices de rotation) On pose $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

- 1) Montrer que $R_\theta R_{\theta'} = R_\varphi$ avec φ qu'on exprimera en fonction de θ et θ' .
- 2) En déduire que pour tout θ et θ' , les matrices R_θ et $R_{\theta'}$ commutent.
- 3) Montrer que $R_\theta \in GL_n(\mathbb{R})$ et $R_\theta^{-1} = R_\varphi$ avec φ qu'on précisera.
- 4) Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. On pose $z' = x' + iy'$ avec $X' = R_\theta X$. Exprimer Z' en fonction de z et θ .
- 5) Interpréter graphiquement la transformation opérée aux coordonnées de X après l'opération $X' = R_\theta X$. Réinterpréter les résultats 1)2) et 3) à l'aune de ces constats.

Exercice 13 : ★★ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A - I_n$ est inversible. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^n A^k = (A - I_n)^{-1} \cdot (A^{n+1} - I_n)$$