

TD 11 - Géométrie

1BCPST 2

Feuille d'exercice

Année 2025- 2026

Vecteurs

Exercice 1 : ♡ (En 1 minute) Dire si les vecteurs suivants forment une base ou pas :

- 1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -10 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
5) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 7) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2 : ♡ (En 1 minute) Former une base orthonormale contenant des vecteurs colinéaires aux vecteurs ci-dessous :

- 1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 7) $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$

Exercice 3 : ★ Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Calculer les coordonnées des vecteurs suivants dans la base $\mathcal{B}$: $\vec{0}$, $\vec{i}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Exercice 4 : (changement de repère) ★ On pose $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

2) On pose $\Omega : (1, 1, 0)$. On not $\mathcal{R} = (O, (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$ et $\mathcal{R}' = (\Omega, \mathcal{B})$.

On note les coordonnées d'un point $M : (x, y, z)$ dans $\mathcal{R}$ et $M : (x', y', z')$ dans $\mathcal{R}'$

. 2.a) Par exemple si $A : (1, 8, 6)$ dans $\mathcal{R}'$, donner les coordonnées de A dans $\mathcal{R}$.

. 2.b) Si $A : (1, -1, 1)$ dans $\mathcal{R}$, donner les coordonnées de A dans $\mathcal{R}'$.

. 2.c) Pour un $M : (x, y, z)$ quelconque, exprimer x', y', z' en fonction de x, y, z .

3) Expression matricielle : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Trouver des matrices $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telles que $X' = MX + B$

. 3.b) Réciproquement, trouver des matrices M' et B' telles que $X = M'X' + B'$

Exercice 5 : ★

Prouver que $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $x + y + z \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$. A quelle condition a-t-on égalité ?

Droites, Plans, Cercles

Exercice 6 : ♡ - ★ Donner une équation cartésienne des plans suivants : 1) $\begin{cases} x = 1 + t + w \\ y = t \\ z = 1 + w \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = t \\ y = w \\ z = 2t \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = t + w \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = 2 + 2t + w \\ y = -1 + t + w \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x = 1 - 5t + 3w \\ y = -4 + 3t + 2w \\ z = 2 + t - w \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x = 3 - 6t + 2w \\ y = -2 + 2t + 2w \\ z = 4 + 2t - 6w \end{cases}$

Exercice 7 : ★ Donner l'équation du plan passant par les trois points suivants : 1) $(0, 0, 2)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 0, 1)$ 2) $(2, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(1, 0, 1)$ 3) $(1, 2, 9)$, $(5, 3, 6)$, $(-1, 0, 1)$ 4) $(1, 5, 3)$, $(2, -1, 4)$, $(4, 5, -1)$

Exercice 8 : ★ Donner une représentation paramétrique des plans suivants : 1) $x + y + z = 1$

2) $y = 1$ 3) $2x + 3y + 4z = 10$ 4) $x + 5y = 5$ 5) $\sqrt{2}x + \sqrt{5}y + z = \sqrt{2}$ 6) $\frac{x}{12} + \frac{y}{6} + \frac{z}{8} = \frac{1}{24}$

Exercice 9 : ★ Donner des equations cartésiennes pour les droites suivantes : 1) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 2 + 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 + t \\ z = -3 - t \end{cases}$

Exercice 10 : ★ Donner une représentation paramétrique pour les droites suivantes :

1) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 3 \\ x + 5y + 2z = 1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x + 6y + 4z = 2 \\ 3x + 9y + 12z = -3 \end{cases}$

Exercice 11 : ★ - ★★ (*intersections dans $\mathbb{R}^2$*) Calculer les intersections des éléments en dimension 2 :
 $D_1 : x + 2y = 5$; $D_2 : 2x - 3y = 1$; (AB) avec $A : (1, 3)$ et $B : (2, 5)$;
 $C_1 : x^2 + (y - 1)^2 = 16$; C_2 cercle centré en A de rayon 2.

Exercice 12 : ★ - ★★ (*intersections dans $\mathbb{R}^3$*) Calculer les intersections de ces éléments en dimension 3 :

$D_1 : \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + 2y + 2z = 8 \end{cases}$; $D_2 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$; (AB) avec $A : (1, 2, 0)$ et $B : (0, 1, 3)$;
 $P_1 : x + 2y + 3z = 1$; P_2 plan passant par $C : (1, 0, 1)$, $D : (-1, 1, 0)$ et $E : (1, 1, 1)$; $P_3 : \begin{cases} x = 1 + t + w \\ y = 2t + w \\ z = 3 + 2t \end{cases}$

Exercice 13 : ★★ 1) Soit $A(a, b)$ et $B(c, d)$ démontrer que l'ensemble des points à égale distance de A et B est une droite dont on donnera l'équation. (C'est la médiatrice)

2) De même dans $\mathbb{R}^3$, montrer que c'est un plan. (C'est le plan médian)

Exercice 14 : ★★ Soit C_1 et C_2 deux cercles de centre Ω_1 et Ω_2 et avec deux points d'intersection A et B . Montrer que (AB) est orthogonale à $(\Omega_1\Omega_2)$. Quelle figure géométrique est formée par $A\Omega_1B\Omega_2$?

Exercice 15 : ★★ Soit S_1 et S_2 deux sphères de centre Ω_1 et Ω_2 qui ont une intersection non réduite à un seul point : 1) Montrer que l'intersection des deux sphères est contenue dans un seul plan.

2) L'intersection est donc un cercle. Montrer que le centre de ce Cercle appartient à $(\Omega_1\Omega_2)$.

Distances

Exercice 16 : ★ Calculer la distance du point M à la droite ou aux plans suivants :

1) $M : (2, 5)$ et $D : 2x + 8y = 2$ 2) $M : (1, 1, 1)$, $P : x + 2y + 3z = 1$

3) $M : (2, 3)$ et D dirigée par $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ passant par $A : (1, 3)$.

4) $M : (1, 3)$ et $D : y = 6x + 12$. 5) $M : (-1, -1, 2)$ et $P : \begin{cases} x = 1 + t + w \\ y = 1 + 2t + w \\ z = -1 - t + w \end{cases}$

6) u $M : (1, 0, 5)$, et P de repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$ avec $A(2, 3, -1)$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 17 : ★★ (*Distance à une droite dans l'espace*) Si A est un point de l'espace et D une droite alors le projeté orthogonal de A sur D est le point H d'intersection de D avec le plan orthogonal à D passant par A .

1) Montrer que la distance de A à D est égale à AH .

2) Calculer la distance de $A : (1, 2, 3)$ avec la droite dirigée par $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ passant par $B : (1, -2, 0)$.

3) Calculer la distance de $O : (0, 0, 0)$ avec la droite $D : \begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x + y + 3z = 2 \end{cases}$

Exercice 18 : ★★ (*Distance à un cercle*) Si $\mathcal{C}$ est un cercle alors la distance de $M \in \mathbb{R}^2$ au cercle est donnée par $d(\mathcal{C}, M) = \min\{HM \mid H \in \mathcal{C}\}$

1) Calculer la distance de $M : (1, 3)$ au cercle de centre $(0, 0)$ de rayon 1.

2) Calculer la distance de $M : (2, 5)$ au cerlce de centre $(1, 2)$ de rayon 4.