

TD 11 - Géométrie Corrigé

1BCPST 2

Feuille d'exercice

Année 2022- 2023

Vecteurs

Exercice 1 : (En 1 minute) Dire si les vecteurs suivants forment une base ou pas :

- 1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -10 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 5) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 7) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Réponses : 1) Oui 2) Non 3) Oui 4) Oui 5) Non 6) Non 7) Non 8) Oui

Exercice 2 : (En 1 minute) Calculer les produits vectoriels suivants :

- 1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 25 \\ -45 \\ 50 \end{pmatrix}$
 1) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 107 \\ 95 \\ 28 \end{pmatrix}$ 5) $20 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 10 \end{pmatrix} = 20 \begin{pmatrix} 47 \\ 5 \\ -19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 940 \\ 40 \\ -380 \end{pmatrix}$

Exercice 3 : (En 1 minute) Former une base orthonormale contenant les vecteurs suivants :

- 1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 7) $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$
 1) $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2) $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 3) $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 4) $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 5) $\frac{1}{\sqrt{29}} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{\sqrt{29}} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 6) $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 7) $\frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{83}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{\sqrt{3306}} \begin{pmatrix} 44 \\ 37 \\ -1 \end{pmatrix}$

Exercice 4 : Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- 1) Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
 2) Calculer les coordonnées des vecteurs suivants dans la base $\mathcal{B}$:

2.a) $\vec{0}$ 2.b) $\vec{i}$ 2.c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

1) Je propose qu'on inverse carrément la matrice, ainsi les calculs des vecteurs suivants seront beaucoup plus simples. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ L'inversion donne : $A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 4 & -5 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ Comme la matrice est inversible, elle est de rang 3 et donc $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme bien une base de $\mathbb{R}^3$ 2) 2.a) On a $\vec{0} = 0\vec{u} + 0\vec{v} + 0\vec{w}$

2.b) On a $A^{-1}\vec{i} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ d'où $\vec{i} = \frac{-3}{7}\vec{u} + \frac{4}{7}\vec{v} + \frac{2}{7}\vec{w}$

2.c) On a $A^{-1}\vec{x} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -28 \\ -21 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'où $\vec{x} = -4\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w}$

Droites, Plans, Cercles

CHECK Exercice 5 : Donner une équation cartésienne des plans suivants :

1) $\begin{cases} x = 1 + t + w \\ y = t \\ z = 1 + w \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = t \\ y = w \\ z = 2t \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = t + w \\ y = 1 + w \\ z = 0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = 2 + 2t + w \\ y = -1 + t + w \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x = 1 - 5t + 3w \\ y = -4 + 3t + 2w \\ z = 2 + t - w \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x = 3 - 6t + 2w \\ y = -2 + 2t + 2w \\ z = 4 + 2t - 6w \end{cases}$

1) $x - y - z = 0$ 2) $2x - z = 0$ 3) $z = 0$

4) On a $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Donc l'équation est $2x - 2y - z = 3$

Dans les suivantes je propose une méthode sans produit vectoriel : avec le pivot de Gauss sur les inconnues t et w

5) $\begin{cases} x = 1 - 5t + 3w \\ y = -4 + 3t + 2w \\ z = 2 + t - w \end{cases} \iff \begin{cases} z = 2 + t - w \\ x = 1 - 5t + 3w \\ y = -4 + 3t + 2w \end{cases} \iff \begin{cases} z = 2 + t - w \\ 3z + x = 7 - 2t \\ 2z + y = 5t \end{cases} \iff \begin{cases} z = 2 + t - w \\ 15z + 5x = 35 - 10t \\ 4z + 2y = 10t \end{cases}$

$\iff \begin{cases} z = 2 + t - w \\ 10z + 5y = 10t \\ 19z + 5x + 2y = 35 \end{cases}$ Finalement l'équation est $5x + 2y + 19z = 35$.

6) $\begin{cases} x = 3 - 6t + 2w \\ y = -2 + 2t + 2w \\ z = 4 + 2t - 6w \end{cases} \iff \begin{cases} z = 4 + 2t - 6w \\ x = 3 - 6t + 2w \\ y = -2 + 2t + 2w \end{cases} \iff \begin{cases} z = 4 + 2t - 6w \\ x + 3z = 15 - 16w \\ y - z = -6 + 8w \end{cases} \iff \begin{cases} z = 4 + 2t - 6w \\ y - z = -6 + 8w \\ x + 2y + z = 3 \end{cases}$

Finalement l'équation est $x + 2y + z = 3$.

CHECK Exercice 6 : Donner l'équation du plan passant par les trois points suivants :

1) $(0, 0, 2), (1, 0, 1), (0, 0, 1)$ 2) $(2, 0, 0), (0, 3, 0), (1, 0, 1)$ 3) $(1, 2, 9), (5, 3, 6), (-1, 0, 1)$ 4) $(1, 5, 3), (2, -1, 4), (4, 5, -1)$

1) $A(0, 0, 2), B(1, 0, 1), C(0, 0, 1)$ sont tous les trois par le plan $y = 0$ c'est donc le seul plan qui fonctionne.

2) $A(2, 0, 0), B(0, 3, 0), C(1, 0, 1)$ donc $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

On a donc $\begin{cases} x = 2 - 2t - w \\ y = 3t \\ z = w \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 - \frac{2}{3}y - z \\ y = 3t \\ z = w \end{cases}$ Donc l'équation est $3x + 2y + 3z = 6$.

3) $A(1, 2, 9), B(5, 3, 6), C(-1, 0, 1)$ donc $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = -2 \begin{pmatrix} 7 \\ -19 \\ 3 \end{pmatrix}$ Donc l'équation est $7x - 19y + 3z = -4$.

4) $A(1, 5, 3)$, $B(2, -1, 4)$, $C(4, 5, -1)$ donc $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 24 \\ 7 \\ 18 \end{pmatrix}$ Donc l'équation est $\boxed{24x + 7y + 18z = 113}$.

CHECK Exercice 7 : Donner une représentation paramétrique des plans suivants : 1) $x + y + z = 1$
 2) $y = 1$ 3) $2x + 3y + 4z = 10$ 4) $x + 5y = 5$ 5) $\sqrt{2}x + \sqrt{5}y + z = \sqrt{2}$ 6) $\frac{x}{12} + \frac{y}{6} + \frac{z}{8} = \frac{1}{24}$

Le principe est toujours le même : trouver deux vecteurs directeurs du plans, donc trois points A,B,C appartenant au plan dont les vecteurs ne sont pas colinéaires.

1) On a $A(1, 0, 0)$; $B(0, 1, 0)$ et $C(0, 0, 1) \in \mathcal{P}$ donc $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Finalement $\boxed{\begin{cases} x = 1 - t - w \\ y = t \\ z = w \end{cases}}$

2) $\boxed{\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = w \end{cases}}$ 3) On a $A(5, 0, 0)$; $B(3, 0, 1)$ et $C(0, 2, 1) \in \mathcal{P}$ donc $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Finalement $\boxed{\begin{cases} x = 5 - 2t - 5w \\ y = 2w \\ z = t + w \end{cases}}$ 4) On a $A(5, 0, 0)$; $B(0, 1, 0)$ et $C(-5, 2, 1) \in \mathcal{P}$ donc $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Finalement $\boxed{\begin{cases} x = 5 - 5t - 10w \\ y = t + 2w \\ z = w \end{cases}}$

5) On a $A(1, 0, 0)$; $B(0, 0, \sqrt{2})$ et $C(0, 1, \sqrt{2} - \sqrt{5}) \in \mathcal{P}$ donc $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \sqrt{2} - \sqrt{5} \end{pmatrix}$ Finalement

$\boxed{\begin{cases} x = 1 - t - w \\ y = w \\ z = \sqrt{2}t + (\sqrt{2} - \sqrt{5})w \end{cases}}$ 6) $\frac{x}{12} + \frac{y}{6} + \frac{z}{8} = \frac{1}{24} \iff 2x + 4y + 3z = 1$. On a $A(-1, 0, 1)$;

$B(0, 1, -1)$ et $C(1, -1, 1) \in \mathcal{P}$ donc $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Finalement $\boxed{\begin{cases} x = -1 + t + 2w \\ y = t - w \\ z = 1 - 2t \end{cases}}$

CHECK Exercice 8 : Donner des equations cartésiennes pour les droites suivantes : 1) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 2 + 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 + t \\ z = -3 - t \end{cases}$

1) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 + t \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 2 + 2t \\ y = 2t \\ 2z = -2 + 2t \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 2 + y \\ y = 2t \\ 2z = -2 + y \end{cases}$ Finalement : $\boxed{\begin{cases} 2x - y = 2 \\ y - 2z = 2 \end{cases}}$

2) $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = 1 + x \\ z = -x \end{cases}$ Finalement : $\boxed{\begin{cases} x - y = -1 \\ x + z = 0 \end{cases}}$ 3) $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ donne $\boxed{\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}}$

4) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = 3 + 2t \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z - 2x = 1 \end{cases}$ Finalement $\boxed{\begin{cases} y = 0 \\ z - 2x = 1 \end{cases}}$

$$\begin{aligned}
5) \quad & \begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 2 + 3t \\ z = 2 + t \end{cases} \iff \begin{cases} z = 2 + t \\ x + 5z = 11 \\ y - 3z = -4 \end{cases} \quad \text{Finalement} \quad \boxed{\begin{cases} x + 5z = 11 \\ y - 3z = -4 \end{cases}} \\
6) \quad & \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 + t \\ z = -3 - t \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5 + t \\ y - x = -4 \\ z + x = 2 \end{cases} \quad \text{Finalement} \quad \boxed{\begin{cases} y - x = -4 \\ z + x = 2 \end{cases}}
\end{aligned}$$

Exercice 9 : Donner une représentation paramétrique pour les droites suivantes :

$$1) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x - 2y + 3z = 3 \\ x + 5y + 2z = 1 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 2x + 6y + 4z = 2 \\ 3x + 9y + 12z = -3 \end{cases}$$

On fait un pivot de Gauss à chaque fois

$$\begin{aligned}
1) \quad & \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -z \end{cases} \quad \text{donc} \quad \boxed{\begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = t \end{cases}} \quad 2) \quad \boxed{\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}} \\
3) \quad & \begin{cases} x - 2y + 3z = 3 \\ x + 5y + 2z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y + 3z = 3 \\ 7y - z = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -3 - 19y \\ z = 7y + 2 \end{cases} \quad \text{Finalement} \quad \boxed{\begin{cases} x = -3 - 19t \\ y = t \\ z = 7t + 2 \end{cases}} \\
4) \quad & \begin{cases} 2x + 6y + 4z = 2 \\ 3x + 9y + 12z = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ x + 3y + 4z = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 3y + 2z = 1 \\ 2z = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 3y = 3 \\ z = -1 \end{cases} \\
& \text{Finalement} \quad \boxed{\begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}}
\end{aligned}$$

Exercice 10 : (*intersections dans $\mathbb{R}^2$*) Calculer les intersections des différents éléments en dimension 2 :

$D_1 : x + 2y = 5$; $D_2 : 2x - 3y = 1$; (AB) avec $A : (1, 3)$ et $B : (2, 5)$;

$C_1 : x^2 + (y - 1)^2 = 16$ **déguen**; C_2 cercle centré en A de rayon 2.

On fait un pivot de Gauss à chaque fois

$$\begin{aligned}
& \boxed{D_1 \cap D_2} \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y = 5 \\ -7y = -9 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{17}{7} \\ y = \frac{9}{7} \end{cases} \quad \text{Donc} \quad \boxed{D_1 \cap D_2 = \left\{ \left(\frac{17}{7}, \frac{9}{7} \right) \right\}} \\
& \boxed{D_1 \cap (AB)} \quad \text{Calculons l'équation de } (AB). \text{ On a } y = ax + b \text{ où } a = \frac{5-3}{2-1} = 2 \text{ donc } y = 2x + b \text{ et } b = y - 2x = 3 - 2 = 1 \text{ d'après les coordonnées de } A \text{ d'où } (AB) : y - 2x = 1 \\
& \text{On a alors} \begin{cases} y - 2x = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} y - 2x = 1 \\ 5x = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{11}{5} \\ x = \frac{3}{5} \end{cases} \quad \text{On trouve donc} \quad \boxed{D_1 \cap (AB) = \left\{ \left(\frac{3}{5}, \frac{11}{5} \right) \right\}} \\
& \boxed{D_2 \cap (AB)} \begin{cases} y - 2x = 1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y - 2x = 1 \\ -4x = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -1 \\ x = -1 \end{cases} \quad \text{On trouve donc} \quad \boxed{D_2 \cap (AB) = \{(-1, -1)\}} \\
& \boxed{D_1 \cap C_1} \begin{cases} x + 2y = 5 \\ x^2 + (y - 1)^2 = 16 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5 - 2y \\ (5 - 2y)^2 + (y - 1)^2 = 16 \end{cases} \quad \text{On a } (5 - 2y)^2 + (y - 1)^2 = 16 \iff \\
& 5y^2 - 22y + 26 = 16 \iff 5y^2 - 22y + 10 = 0 \text{ On a } \Delta = 4 \cdot (121 - 50) = 4 \cdot 71 > 0. \text{ On a donc } y_1 = \frac{11 + \sqrt{71}}{5} \\
& \text{et } y_2 = \frac{11 - \sqrt{71}}{5}. \text{ finalement on trouve : } \boxed{D_1 \cap C_1 = \left\{ \left(\frac{3 - 2\sqrt{71}}{5}, \frac{11 + \sqrt{71}}{5} \right), \left(\frac{3 + 2\sqrt{71}}{5}, \frac{11 - \sqrt{71}}{5} \right) \right\}} \\
& \boxed{D_2 \cap C_1} \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x^2 + (y - 1)^2 = 16 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1 + 3y}{2} \\ \frac{1}{4}(1 + 3y)^2 + (y - 1)^2 = 16 \end{cases} \quad \text{On a } (1 + 3y)^2 + 4(y - 1)^2 = 64 \iff
\end{aligned}$$

$13y^2 + 2y - 58 = 0$ On a $\Delta = 4 \cdot (4 + 58 \cdot 13) = 4 \cdot 758 > 0$. On a donc $y_1 = \frac{\sqrt{758} - 1}{13}$ ou $y_2 = -\frac{\sqrt{758} + 1}{13}$

On a donc $D_1 \cap C_1 = \left\{ \left(\frac{10 + 3\sqrt{758}}{26}, \frac{\sqrt{758} - 1}{13} \right); \left(\frac{10 - 3\sqrt{758}}{26}, \frac{-\sqrt{758} + 1}{13} \right) \right\}$

$(AB) \cap C_1 \left\{ \begin{array}{l} y - 2x = 1 \\ x^2 + (y - 1)^2 = 16 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} y = 1 + 2x \\ x^2 + (2x)^2 = 16 \end{array} \right.$

On a $x^2 + (2x)^2 = 16 \iff 5x^2 = 16 \iff x = \pm \frac{4}{\sqrt{5}}$ On a donc $(AB) \cap C_1 = \left\{ \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{5 + 8\sqrt{5}}{5} \right); \left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{5 - 8\sqrt{5}}{5} \right) \right\}$

$C_1 \cap C_2$ On calcule l'équation de $C_2 : (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$

$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + (y - 1)^2 = 16 \\ (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4 \end{array} \right. \quad L_1 - L_2 : x^2 - (x - 1)^2 + (y - 1)^2 - (y - 3)^2 = 12 \iff (x - x + 1)(x + x - 1) + (y - 1 - y + 3)(y - 1 + y - 3) = 12 \iff 2x + 1 + 2(2y - 4) = 12 \iff 2x + 4y - 7 = 12 \iff 2x + 4y - 19 = 0 \iff x = \frac{19}{2} - 2y$

On injecte dans une equation : $x^2 + (y - 1)^2 = 16 \iff \left(\frac{19}{2} - 2y \right)^2 + (y - 1)^2 = 16 \iff 5y^2 - 21y + \frac{23}{4} = 16 \iff 5y^2 - 21y - \frac{41}{4} = 0$

$\Delta = 21^2 + 41 \cdot 5 = 441 + 205 = 646$ donc $y_1 = \frac{21 + \sqrt{646}}{10}$ et $y_2 = \frac{21 - \sqrt{646}}{10}$.

Finalement $C_1 \cap C_2 = \left\{ \left(\frac{53 - 2\sqrt{646}}{10}, \frac{21 + \sqrt{646}}{10} \right); \left(\frac{53 + 2\sqrt{646}}{10}, \frac{21 - \sqrt{646}}{10} \right) \right\}$

$D_1 \cap C_2 \left\{ \begin{array}{l} x + 2y = 5 \\ (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = 5 - 2y \\ (4 - 2y)^2 + (y - 3)^2 = 4 \end{array} \right. \quad (4 - 2y)^2 + (y - 3)^2 = 4 \iff 5y^2 - 22y + 21 = 0$ On a $\Delta = 4(121 - 105) = 4 \cdot 16 > 0$ Donc $y_1 = \frac{7}{5}$ et $y_2 = 3$

On a donc $D_1 \cap C_2 = \left\{ \left(\frac{11}{5}, \frac{7}{5} \right), (-1, 3) \right\}$

$D_2 \cap C_2 \left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y = 1 \\ (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1 + 3y}{2} \\ (3y - 1)^2 + 4(y - 3)^2 = 16 \end{array} \right. \iff (3y - 1)^2 + 4(y - 3)^2 = 16 \iff 13y^2 - 18y + 21 = 0$ On $\Delta = 4(81 - 13 \cdot 21) < 0$ donc pas d'intersection. $D_2 \cap C_1 = \emptyset$

$(AB) \cap C_2 \left\{ \begin{array}{l} y - 2x = 1 \\ (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} y = 1 + 2x \\ (x - 1)^2 + 4(2x - 2)^2 = 4 \end{array} \right. \quad (x - 1)^2 + 4(x - 1)^2 = 4 \iff 5(x - 1)^2 = 4 \iff x - 1 = \pm \frac{2}{5} \iff x = \frac{7}{5} \text{ ou } x = \frac{3}{5}$

On a donc $(AB) \cap C_2 = \left\{ \left(\frac{2}{5}, \frac{9}{5} \right), \left(\frac{11}{5}, \frac{27}{5} \right) \right\}$

Exercice 11 : (*intersections dans $\mathbb{R}^3$*) Calculer les intersections des différents éléments en dimension 3 :

$D_1 : \left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 2 \\ x + 2y + 2z = 8 \end{array} \right. ; D_2 = \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 + t \end{array} \right. ; (AB) \text{ avec } A : (1, 2, 0) \text{ et } B : (0, 1, 3) ;$

$P_1 : x + 2y + 3z = 1 ; P_2 \text{ plan passant par } C : (1, 0, 1), D : (-1, 1, 0) \text{ et } E : (1, 1, 1) ; P_3 : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + t + w \\ y = 2t + w \\ z = 3 + 2t \end{array} \right. \dots\dots\dots$

$D_1 \cap D_2$ On injecte $D_2 : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 + t \end{array} \right.$ dans l'équation de $D_1 : \left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 2 \\ x + 2y + 2z = 8 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} 1 + t - 2t + (-1 + t) = 2 \\ 1 + t + 4t + (-1 + t) = 8 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} 0 = 2 \\ 6t = 8 \end{array} \right.$

Le système es incompatible donc $D_1 \cap D_2 = \emptyset$

$D_1 \cap (AB)$ On a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ donc $(AB) : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = 3t \end{array} \right.$ et on injecte dans $D_1 :$

$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + 2y + 2z = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - t - (2 - t) + 3t = 2 \\ 1 - t + 2(2 - t) + 6t = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} 3t = 3 \\ 3t = 3 \end{cases} \iff t = 1$ On a donc un point d'intersection donné par le paramètre $t = 1$, en injectant cela dans les coordonnées paramétrique de (AB) , on trouve $D_1 \cap (AB) = \{(0, 1, 3)\}$

$D_2 \cap (AB)$ Plusieurs manières de faire. Je propose d'égaliser les equations paramétriques de part et d'autre : On veut $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = 3t \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2s \\ z = -1 + s \end{cases}$ donc cela donne :

$$\begin{cases} 1 + s = 1 - t \\ 2s = 2 - t \\ -1 + s = 3t \end{cases} \iff \begin{cases} s = -t \\ 2s + t = 2 \\ s - 3t = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} s = -t \\ s = 2 \\ 4s = -1 \end{cases}$$
 le système est incompatible, on n'a donc pas de point d'intersection $D_2 \cap (AB) = \emptyset$.

$P_1 \cap D_1$ On a trois equations : $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + 2y + 2z = 8 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3y + z = 6 \\ 3y + 2z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3y + z = 6 \\ z = -5 \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} x = \frac{32}{3} \\ y = \frac{11}{3} \\ z = -5 \end{cases}$$

On obtient : $P_1 \cap D_1 = \left\{ \left(\frac{32}{3}, \frac{11}{3}, -5 \right) \right\}$

$P_1 \cap D_2$ On insère le paramètre de D_2 dans l'équation de P_1 : $(1 + t) + 4t + 3(-1 + t) = 1 \iff -2 + 8t = 1 \iff t = \frac{3}{8}$. On a donc en injectant le paramètre dans l'equation de D_2 : $P_1 \cap D_2 = \left\{ \left(\frac{11}{8}, \frac{3}{4}, \frac{-5}{8} \right) \right\}$

$P_1 \cap (AB)$ On insère le paramètre de (AB) dans l'équation de P_1 : $(1 - t) + 2(2 - t) + 9t = 1 \iff 5 + 6t = 1 \iff t = \frac{-2}{3}$. On a donc en injectant le paramètre dans l'equation de (AB) : $P_1 \cap (AB) = \left\{ \left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, -2 \right) \right\}$

$P_2 \cap D_1$ On a $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\vec{n} = \overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Donc P_2 a pour equation $x - 2z = -1$. On résout : $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + 2y + 2z = 8 \\ x - 2z = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x + 4z = 12 \\ x - 2z = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x - 2z = -1 \\ 10z = 15 \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2} \\ x = 2 \\ z = \frac{3}{2} \end{cases}$$

On obtient donc $P_1 \cap (AB) = \left\{ \left(2, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) \right\}$

$P_2 \cap D_2$ On insère le paramètre de D_2 dans l'équation de P_2 : $(1 + t) - 2(-1 + t) = -1 \iff -t + 3 = -1 \iff t = 4$. On a donc en injectant le paramètre dans l'équation de D_2 : $P_1 \cap D_2 = \{(5, 8, 3)\}$

$P_2 \cap (AB)$ On insère le paramètre de (AB) dans l'équation de P_2 : $(1 - t) - 6t = -1 \iff 1 - 7t = -1 \iff t = \frac{2}{7}$. On a donc en injectant le paramètre dans l'équation de (AB) : $P_1 \cap (AB) = \left\{ \left(\frac{5}{7}, \frac{12}{7}, \frac{6}{7} \right) \right\}$

$P_2 \cap P_1$ Que dire, sinon que les plans ne sont pas parallèles (car leur vecteur normaux ne sont pas colli-

néaires) et donc que leur intersection est la droite

$$P_2 \cap P_1 = D_3 \text{ d'équation cartésienne : } \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x - 2z = -1 \end{cases}$$

$P_3 \cap D_1$ On injecte les paramètres de P_3 dans les equations de D_1 :

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + 2y + 2z = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 + t + w - 2t - w + 3 + 2t = 2 \\ 1 + t + w + 4t + 2w + 6 + 2t = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} t = -2 \\ 7t + 3w = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} t = -2 \\ 3w = 15 \end{cases} \iff \begin{cases} t = -2 \\ w = 5 \end{cases}$$

Finalement en injectant dans l'équation paramétrique de P_3 , on trouve $P_3 \cap D_1 = \{(4, 1, -3)\}$

$P_3 \cap D_2$ On a deux equations paramétriques, on peut donc égaliser les coordonnées :

$$\begin{cases} 1 + s = 1 + t + w \\ 2s = 2t + w \\ -1 + s = 3 + 2t \end{cases} \iff \begin{cases} s - t - w = 0 \\ 2s - 2t - w = 0 \\ s - 2t = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} s - t - w = 0 \\ s - t = 0 \\ s - 2t = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} s - t - w = 0 \\ s - t = 0 \\ -t = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} w = 0 \\ s = -4 \\ t = -4 \end{cases}$$

Donc on trouve $P_3 \cap D_1 = \{(-3, -8, -5)\}$

$P_3 \cap (AB)$ On a deux equations paramétriques, on peut donc égaliser les coordonnées :

$$\begin{cases} 1 - s = 1 + t + w \\ 2 - s = 2t + w \\ 3s = 3 + 2t \end{cases} \iff \begin{cases} s + t + w = 0 \\ s + 2t + w = 2 \\ 3s - 2t = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} s + t + w = 0 \\ t = 2 \\ 3s - 2t = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} w = -\frac{13}{3} \\ t = 2 \\ s = \frac{7}{3} \end{cases}$$

Donc on trouve $P_3 \cap (AB) = \left\{ \left(\frac{-4}{3}, \frac{-1}{3}, 7 \right) \right\}$

$P_3 \cap P_1$ On a P_3 qui a pour vecteur normal $\vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ P_3 a donc pour equation $2x - 2y + z = 5$. Il n'est pas parallèle à P_1 , et donc l'intersection est une droite :

$$P_3 \cap P_1 = D_4 \text{ d'équation cartésienne } \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - 2y + z = 5 \end{cases}$$

$P_3 \cap P_2$ De même $\vec{n}_3$ et $\vec{n}_2$ n'étant pas colinéaires, on obtient une droite d'équation

$$P_3 \cap P_2 = D_5 : \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x - 2z = -1 \end{cases}$$

$P_3 \cap P_2 \cap P_1$ On a $P_3 \cap P_2 \cap P_1 = D_5 \cap P_1$ donc on résout le système :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x - 2z = -1 \\ 2x - 2y + z = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x - 2z = -1 \\ 3x + 4z = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x - 2z = -1 \\ 10z = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{-5}{4} \\ x = \frac{4}{5} \\ z = \frac{9}{10} \end{cases}$$

Finalement $P_3 \cap P_2 \cap P_1 = \left\{ \left(\frac{4}{5}, \frac{-5}{4}, \frac{9}{10} \right) \right\}$

Exercice 12 : 1) Soit $A(a, b)$ et $B(c, d)$ démontrer que l'ensemble des points à égale distance de A et B est une droite dont on donnera l'équation. (C'est la médiatrice)

2) De même dans $\mathbb{R}^3$, montrer que c'est un plan. (C'est le plan médian)

1) On prend $M(x, y)$. On a $AM = BM \iff \|\vec{AM}\|^2 = \|\vec{BM}\|^2 \iff (x - a)^2 + (y - b)^2 = (x - c)^2 + (y - d)^2 \iff 2(c - a)x + 2(d - b)y = c^2 + d^2 - a^2 - b^2$ L'équation de la médiatrice est donc $2(c - a)x + 2(d - b)y = c^2 + d^2 - a^2 - b^2$

2) On a le même raisonnement mais avec trois coordonnées $A(a, b, c)$ et $B(d, e, f)$:

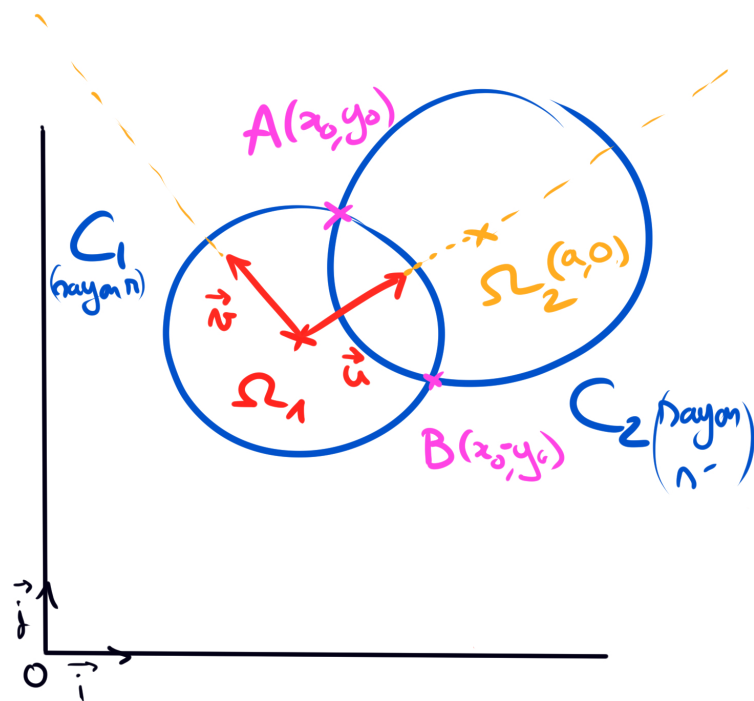
Le plan a pour equation $2(d-a)x + 2(e-b)y + 2(f-c)z = d^2 + e^2 + f^2 - a^2 - b^2 - c^2$

Exercice 13 : Soit C le cercle de centre $\Omega : (a, b)$ de rayon r . On pose $A : (x_0, y_0)$ un point de ce cercle. Donner l'équation de la tangente en au cercle en A .

La tangente passe par A et a donc pour equation : $\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0$. Là deux manières d'identifier α et β : Pour l'équation on peut remarquer que $\overrightarrow{\Omega A}$ est normal à la droite.

On a alors $(a - x_0)(x - x_0) + (a - y_0)(y - y_0) = 0$

Exercice 14 : Soit C_1 et C_2 deux cercles de centre Ω_1 et Ω_2 et avec deux points d'intersection A et B . Montrer que (AB) est orthogonale à $(\Omega_1\Omega_2)$. Quelle figure géométrique est formée par $A\Omega_1B\Omega_2$ si les cercles ont le même rayon ?



On pose $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}}{\Omega_1\Omega_2}$ et $\vec{v}$ le vecteur normal à $\vec{u}$ direct. On a $(\Omega_1, (\vec{u}, \vec{v}))$ un repère orthonormé. Dans ce repère, les équations des cercles sont $C_1 : x^2 + y^2 = r^2$ et $C_2 : (x - a)^2 + y^2 = (r')^2$ C'est à dire en soustrayant (1) à (2) :

$(x - a)^2 - x^2 = r^2 - (r')^2 \iff -a(2x - a) = (r + r')(r - r')$ Comme le cercle admet une intersection on a

forcément une solution $x_0 = \frac{(r + r')(r' - r)}{2a} + \frac{a}{2}$

L'unicité de la solution donne deux choix pour y : $y = \pm\sqrt{r^2 - x_0^2}$. On en déduit $\overrightarrow{\Omega_1 A} = x_0\vec{u} + y_0\vec{v}$ et

$\overrightarrow{\Omega_1 B} = x_0\vec{u} - y_0\vec{v}$ cela donne $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\Omega_1} + \overrightarrow{\Omega_1 B} = \overrightarrow{\Omega_1 B} - \overrightarrow{\Omega_1 A} = -2y_0\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}}{\Omega_1\Omega_2}$

donc orthogonal à $\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$ Finalement (AB) est bien orthogonale à $(\Omega_1\Omega_2)$

Exercice 15 : Soit S_1 et S_2 deux sphères de centre Ω_1 et Ω_2 qui ont une intersection non réduite à un seul point :

1) Montrer que l'intersection des deux sphères est contenue dans un seul plan.

2) L'intersection est donc un cercle. Montrer que le centre de ce Cercle appartient à $(\Omega_1\Omega_2)$.

1) Même démarche que pour l'exercice précédent, on se met dans une base orthonormée appropriée. On

pose $\vec{u} = \frac{\vec{\Omega_1\Omega_2}}{\Omega_1\Omega_2}$ qu'on complète en base orthonormée directe $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et on travaille dans le repère $(\Omega_1, (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}))$. Dans ce repère, les équations des sphères sont $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ et $S^2 : (x-a)^2 + y^2 + z^2 = (r')^2$ C'est à dire en soustrayant (1) à (2) : $(x-a)^2 - x^2 = r^2 - (r')^2 \iff -a(2x-a) = (r+r')(r-r')$

Comme les sphères admettent une intersection, on a $x = \frac{(r+r')(r'-r)}{2a} + \frac{a}{2}$ les points d'intersection des sphères sont donc contenues dans le plan d'équation encadrée. A noter que cela est pour les coordonnées du plan dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. Concrètement il s'agit du plan dirigé par $\vec{v}$ et $\vec{w}$ (de vecteur normal $\vec{u}$ et

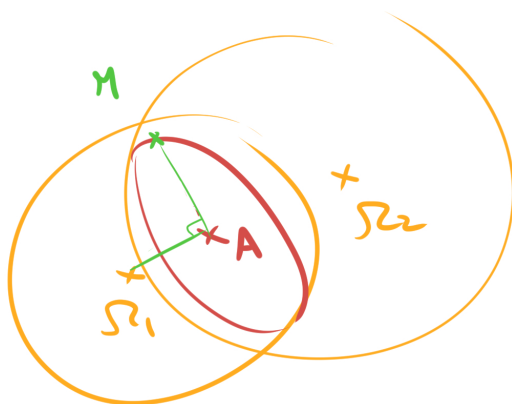
passant par A tel que $\vec{\Omega_1 A} = \left(\frac{(r+r')(r'-r)}{2a} + \frac{a}{2} \right) \vec{u}$.

2) Le centre du Cercle est le point A précédemment mentionné. En effet, on a $\vec{\Omega_1 A} = \left(\frac{(r+r')(r'-r)}{2a} + \frac{a}{2} \right) \vec{u}$

et pour tout point M dans le cercle, on a On a $\|\vec{AM} + M\vec{\Omega_1}\|^2 = \|\vec{A\Omega_1}\|^2 = \|\vec{AM}\|^2 + \|M\vec{\Omega_1}\|^2$ par théorème de Pythagore (M et A sont sur le plan orthogonal à $\vec{u}$ auquel $\vec{\Omega_1 A}$ est colinéaire. donc $\vec{AM}$ et $M\vec{\Omega_1}$ sont orthogonaux.)

Donc $\|\vec{AM}\|^2 = \|\vec{A\Omega_1}\|^2 - \|M\vec{\Omega_1}\|^2 = \|\vec{A\Omega_1}\|^2 - r^2$, donc la distance AM ne dépend pas de M. Autrement dit, les points M du cercle (qui sont sur S_1 et sur le plan d'intersection avec S_2 en même temps) sont tous à égale distance de A. Donc A est bien le centre du cercle. Par ailleurs, $\vec{\Omega_1 A}$ est colinéaire à $\vec{u}$, lui même colinéaire à $\vec{\Omega_1\Omega_2}$. Donc A le centre du cercle est bien sur la droite $(\Omega_1\Omega_2)$

$$\vec{AM} \cdot \vec{\Omega_1 A} = 0$$



$$\begin{aligned} AM^2 + \Omega_1 A^2 &= M\Omega_1^2 \\ AM^2 &= \Omega_1 A^2 - M\Omega_1^2 \end{aligned}$$

Exercice 16 : Calculer la distance du point M à la droite ou aux plans suivants :

1) $M : (2, 5)$ et $D : 2x + 8y = 2$ 2) $M : (1, 1, 1)$, $P : x + 2y + 3z = 1$

3) $M : (2, 3)$ et D dirigée par $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ passant par $A : (1, 3)$.

- 4) $M : (1, 3)$ et $D : y = 6x + 12$. 5) $M : (-1, -1, 2)$ et $P : \begin{cases} x = 1 + t + w \\ y = 1 + 2t + w \\ z = -1 - t + w \end{cases}$
- 6) u $M : (1, 0, 5)$, et P de repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$ avec $A(2, 3, -1)$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

1) $\frac{|2 \cdot 4 + 8 \cdot 5 - 2|}{\sqrt{4 + 64}} = \frac{46}{\sqrt{68}} = \frac{23}{\sqrt{17}}$ 2) $\frac{1 + 2 + 3 - 1}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{5}{\sqrt{14}}$

3) on a $\vec{n} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{AM} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\frac{|\vec{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|-6 + 0|}{\sqrt{36 + 25}} = \frac{6}{\sqrt{61}}$

4) $\frac{|3 - 6 - 12|}{\sqrt{1 + 36}} = \frac{15}{\sqrt{37}}$.

5) $M : (-1, -1, 2)$ et P passe par $A = (1, 1, -1)$ on a $\vec{AM} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ des vecteurs

directeurs de P , on a donc $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normal à P . Finalement $\frac{|\vec{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

6) On a $\vec{AM} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ est normal à P . Finalement $\frac{|\vec{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{34}{\sqrt{27}}$

Exercice 17 : (Distance à une droite dans l'espace)

Si A est un point de l'espace et D une droite alors le projeté orthogonal de A sur D est le point H d'intersection de D avec le plan orthogonal à D passant par A .

1) Montrer que la distance de A à D est égale à AH .

2) Calculer la distance de $A : (1, 2, 3)$ avec la droite dirigée par $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ passant par $B : (1, -2, 0)$.

3) Calculer la distance de $O : (0, 0, 0)$ avec la droite $D : \begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x + y + 3z = 2 \end{cases}$

1) On a pour tout point M de D , $\vec{AM} = \vec{AH} + \vec{HM}$ donc d'après le théorème de Pythagore, comme $\vec{AH}$ (vecteur directeur du plan) et $\vec{HM}$ (vecteur directeur de la droite) sont orthogonaux,

on a $\|\vec{AM}\|^2 = \|\vec{AH}\|^2 + \|\vec{HM}\|^2 \geq \|\vec{AH}\|^2$ On en déduit que pour tout $M \in D$, $AM \geq AH$

AH est donc un minorant de $d(A, D)$ par ailleurs, comme H est un point de D , le minorant est atteint en H donc AH

2) Le plan orthogonal à D a pour vecteur normal $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et il passe par A . Il a donc pour équation :

$$P : -x + y + 2z = 7. \text{ On regarde l'intersection avec } D \text{ dont l'équation paramétrique est : } \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = 2t \end{cases}$$

On remplace dans l'équation du plan : $-x + y + 2z = 7 \iff -1 + t - 2 + t + 4t = 7 \iff 6t = 10 \iff t = \frac{5}{3}$

Donc on trouve $H = \left(\frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{10}{3} \right)$

Finalement $d(A, D) = AH = \|\vec{AH}\| = \sqrt{\left(1 + \frac{2}{3}\right)^2 + \left(2 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(3 - \frac{10}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{123}}{3}$ cela donne $d(A, D) = \sqrt{\frac{41}{3}}$

3) On fait le pivot : $\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x + y + 3z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ y - 7z = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = +5 - 10t \\ y = -3 + 7t \\ z = t \end{cases}$ Un vecteur

directeur est donc $\vec{u} = \begin{pmatrix} -10 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui est normal au plan recherché.

Donc $P : -10x + 7y + z = 0$ (car il passe par O). On cherche l'intersection de D et de P . On a :

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x + y + 3z = 2 \\ -10x + 7y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 7x + 10y = 5 \\ -8x + 10y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 7x + 10y = 5 \\ -15x = -5 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 7/15 \\ y = 4/15 \\ x = 1/3 \end{cases}$$

L'intersection est donc $H = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{15}, \frac{7}{15}\right)$

et la distance est $d(O, D) = OH = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{15}\right)^2 + \left(\frac{7}{15}\right)^2} = \frac{\sqrt{90}}{15} = \frac{\sqrt{10}}{5}$ on trouve donc $d(O, D) = \sqrt{\frac{2}{5}}$

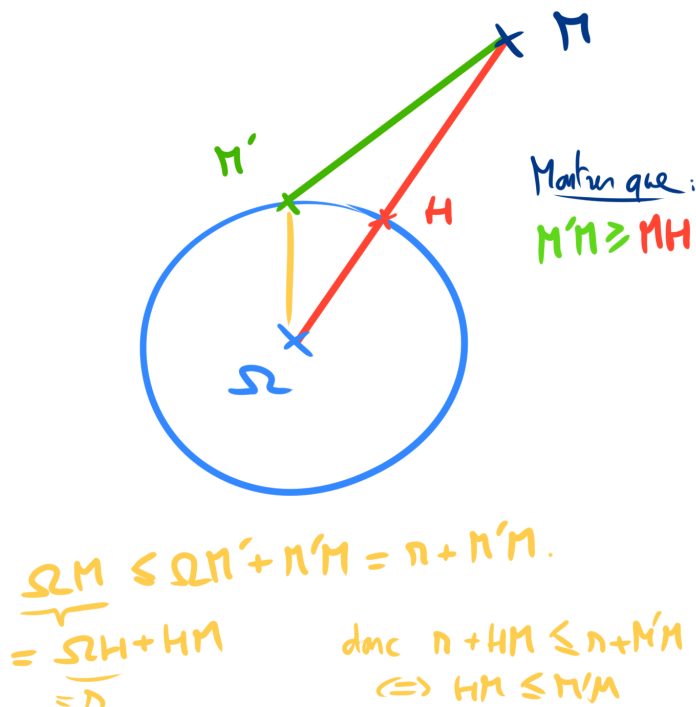
Exercice 18 : (Distance à un cercle) Si C est un cercle alors la distance de $M \in \mathbb{R}^2$ au cercle est donnée par $d(C, M) = \min\{HM \mid H \in C\}$

1) Calculer la distance de $M : (1, 3)$ au cercle de centre $(0, 0)$ de rayon 1.

2) Calculer la distance de $M : (2, 5)$ au cercle de centre $(1, 2)$ de rayon 4.

.....

Si on fait un dessin on voit que la distance minimale de M à un cercle de centre Ω de rayon r est la distance HM où H est le point d'intersection entre le cercle et la droite (ΩM) . Démontrons cela. On a $\Omega H = r$ et $\vec{\Omega H}$ (positivement) colinéaire à $\vec{\Omega M}$ donc $\vec{\Omega H} = \lambda \vec{\Omega M}$ avec $\lambda > 0$ et donc $\|\vec{\Omega H}\| = \lambda \|\vec{\Omega M}\|$ donne $\lambda = \frac{r}{\Omega M}$.



Par ailleurs, si $M' \in C$ alors on a par inégalité triangulaire $\Omega M' + M'M \geq \Omega M$ c'est à dire que $MM' \geq \Omega M - r$. Par ailleurs, comme $\vec{\Omega H}$ et $\vec{HM}$ sont colinéaires on a :

$\Omega M = \Omega H + HM = r + HM$ (l'égalité dans l'inégalité triangulaire s'obtient si et seulement si les vecteurs sont positivement liés, comme c'est le cas ici).

Ainsi : $\forall M' \in \mathbb{C}$, $MM' \geq \Omega M - r = r + HM - r = HM$. On trouve que HM est un minorant de la distance MM' où $M' \in \mathbb{C}$. Par ailleurs il est atteint quand $M' = H$, on a donc :

$$d(M, C) = HM = \|\vec{\Omega H} - \vec{\Omega M}\| = \|(\lambda - 1)\vec{\Omega M}\| = |\lambda - 1|\Omega M = \left| \frac{r}{\Omega M} - 1 \right| \cdot \Omega M = |r - \Omega M|.$$

Finalement : $d(M, C) = |r - \Omega M|$

1) Ca tombe tout de suite avec la formule $\Omega M = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} > r = 1$ donc $d(M, C) = \sqrt{10} - 1$

2) Cette fois on a $\Omega M = \sqrt{(2-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{10} < r = 4$ donc $d(M, C) = 4 - \sqrt{10}$
