

# TD 13 - Polynômes

1BCPST 2

Feuille d'exercice

Année 2025 - 2026

**Exercice 1 :** (degré ★) On donne  $d^\circ P = n$  et  $c(P) = a \in \mathbb{R}^*$ .

Donner le degré et le coefficient dominant des polynômes suivants :

- 1)  $P \cdot X^2$     2)  $(P(X^2))^3$     3)  $P^3(X^2)$     4)  $P \cdot P'(X+1) - P''$     5)  $P^4 + 2P^2 + 1$     6)  $P \cdot (P'' - 2P')$   
 7)  $P \circ P'(X^3 + 1)$     8)  $P(X^2) - P'(X^3)$     9)  $P - P'P''$     10)  $\sum_{k=0}^{2n} P^k(X^2 + 1)$

**Exercice 2 :** (♥) Factoriser les polynômes suivants dans  $\mathbb{R}$  :

- 1)  $X^2 + 7X + 12$     2)  $X^2 - 100X + 2500$     3)  $15X^2 + 75X + 60$     4)  $X^3 - 10X^2 + 27X - 18$   
 5)  $X^3 - 2X^2 + X - 2$     6)  $X^4 + 8X^3 + 21X^2 + 22X + 8$     7)  $X^5 - 2X^3 - 63X$

**Exercice 3 :** (★ - ★★ Factorisations plus compliquées) Factoriser les polynômes suivants dans  $\mathbb{R}$  :

- 1)  $X^5 - 12X^4 + 44X^3 - 38X^2 - 45X + 50$     2)  $X^3 + 15X^2 + 75X + 125$     3)  $X^6 - 19X^3 - 216$   
 4)  $X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X^2 + 2X + 2$     5)  $X^4 - 4X^3 - 26X^2 + 30X - 225$

**Exercice 4 :** (★★★ Factorisation de degré  $n$ ) Factoriser sur  $\mathbb{R}$  les polynômes  $X^{2n} + 1$  et  $X^{2n+1} + 1$

**Exercice 5 :** ★★ Soit  $P$  un polynôme. Montrer que  $P(X^n)$  est factorisable par  $X^n - 1$  si et seulement si  $P$  est factorisable par  $X - 1$ .

**Exercice 6 :** ★ - ★★ - ★★★ Trouver tous les polynômes  $P$  qui vérifient l'égalité suivante :

- 1)  $P = P' + X^2$     2)  $P = P'P''$     3)  $P(X^2) = (X^2 + 1)P$     4)  $(P')^2 = 4P$     5)  $P(X+1) = P(X)$ .  
 6)  $XP' + P = X^2 + 1$     7)  $(X^2 + 1)P' + 2XP = 2X$     8)  $P^2 = P(X^2)$     9)  $\exists Q \in \mathbb{R}[X] \mid P = QP'$

**Exercice 7 :** ★★ On pose  $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} X^k$ . Montrer que  $P_n$  n'admet pas de racines multiple.

**Exercice 8 :** (★ Suite de polynômes) On définit une suite de polynômes  $(P_n)_n$  par :

- 1) Calculer  $P_2$  et  $P_3$      $P_0 = 1$ ,  $P_1 = X$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $P_{n+2} + P_n = 2XP_{n+1}$   
 2) Déterminer le degré et le coefficient dominant de  $P_n$ .  
 3) Déterminer la parité de  $P_n$  et calculer  $P_n(1)$ .

**Exercice 9 :** (★★ Polynômes de Tchebychev) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on veut montrer qu'il existe un unique polynôme  $T_n \in \mathbb{R}[X]$  tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))$$

- 1) S'il existe, prouver l'unicité d'un tel polynôme  $T_n$ .  
 2) A l'aide d'un raisonnement par récurrence et exprimer  $T_{n+2}$  en fonction de  $T_{n+1}$  et  $T_n$ .  
 3) En déduire l'existence de  $T_n$ . Quel est le degré de  $T_n$ , quel est son coefficient dominant ?  
 4) Quelle est la parité de  $T_n$  ?  
 5) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , montrer que  $x \rightarrow \cos(n \operatorname{Arccos}(x))$  est une fonction polynomiale en  $x$ .  
 6) Montrer que  $T_n$  admet  $n$  racines. Trouver un majorant et un minorant des racines de  $T_n$ .

**Exercice 10 :** (★★ - ★★★ Cotangente) Pour  $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ , on pose  $\cotan \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\tan \theta}$ .

- 1) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , montrer qu'il existe un unique polynôme  $P_n$  tel que :  

$$\forall \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[ , \sin((2n+1)\theta) = (\sin \theta)^{2n+1} P_n(\cotan^2 \theta)$$
  
 2) Expliciter  $P_n$   
 3) Trouver les racines de  $P_n$  et en déduire que  $P_n$  est un polynôme scindé.  
 4) En déduire  $\sum_{k=1}^n \cotan^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$   
 5) Démontrer que  $\forall a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ , on a  $\cotan^2 a \leq \frac{1}{a^2} \leq 1 + \cotan^2 a$   
 6) Prouver que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

**Exercice 11 :** (★★ *Polynômes de Lagrange*)

Soit  $a_1, a_2, \dots, a_n$  des réels deux à deux distincts et  $b_1, b_2, \dots, b_n$  des réels pas forcément distincts. L'objectif de cet exercice est de démontrer qu'il existe un unique polynôme  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$  tel que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(a_i) = b_i$$

$P$  est appelé le polynôme interpolateur de Lagrange.

1) Démontrer ce résultat pour  $n = 1$  et  $n = 2$ .

2) On se place dans le cas général avec  $n$  quelconque et on fixe  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$

. 2.a) Justifier que si  $P$  existe alors il est unique.

. 2.b) Si  $b_i = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ , expliciter en fonction des  $a_i$  le polynôme interpolateur de Lagrange, qu'on notera  $L_j$

. 2.c) A l'aide d'une combinaison des polynômes  $L_j$  définis ci-dessus, montrer l'existence du polynôme interpolateur de Lagrange dans le cas général.

3) Calculer les polynôme interpolateur de Lagrange vérifiant les conditions suivantes :

. 3.a)  $P(1) = 2$  et  $P(3) = 3$

. 3.b)  $P(1) = 2$  et  $P(3) = 3$  et  $P(-1) = 2$

. 3.c)  $P(1) = 2$  et  $P(3) = 3$  et  $P(-1) = 2$  et  $P(5) = 3$

4) Ensemble des polynômes interpolateurs :

. 4.a) Si  $P_0$  est le polynôme interpolateur de Lagrange pour les réels  $a_1, a_2, \dots, a_n$  et  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , donner une condition nécessaire et suffisante sur  $P \in \mathbb{R}[X]$  (de degré quelconque) pour avoir  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(a_i) = b_i$ .

. 4.b) Déterminer l'ensemble des polynômes  $P \in \mathbb{R}[X]$  tels que  $P(1) = 2$  et  $P(3) = 3$  et  $P(-1) = 2$

**Exercice 12 :** (★★ - ★★★ *Division Euclidienne*)

On admet qu'un sous ensemble de  $\mathbb{N}$  non vide admet toujours un minimum.

1) Pour  $A, B \in \mathbb{R}[X]$ , on souhaite montrer qu'il existe un unique couple  $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]$  tel que :

$$A = QB + R \text{ et } d^\circ R < B$$

. 1.a) Si  $A$  est factorisable par  $B$ , justifier l'existence du couple  $(Q, R)$ .

. 1.b) Sinon, justifier qu'il existe un polynôme  $R$  tel que  $d^\circ R = \min\{d^\circ(A - QB) \mid Q \in \mathbb{R}[X]\}$

. 1.c) En déduire l'existence de  $Q$  et  $R$  dans le cas général.

. 1.d) Démontrer l'unicité du couple  $(Q, R)$ .

2) Calculer  $Q, R$  pour les polynômes suivants : a)  $A = X^2 + 1$  et  $B = X^2$

. 2.b)  $A = X^2 + 4X + 4$  et  $B = X + 2$

. 2.c)  $A = X^4 + 2X^3 + 3X + 1$  et  $B = X^2 + 2X + 1$

. 2.d)  $A = X^n$  et  $B = X^2 - 6X + 9$  (on calculera  $R$  uniquement)

3) On pose  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$  et  $P = X^2 - 6X + 9$ . Calculer  $P(A)$ .

4) En déduire l'expression de  $A^n$  à l'aide du résultat de la question 2.d).