

TD 14 - Suites Réelles

1BCPST 2

Feuille d'exercice

Année 2025 - 2026

Suites convergentes

Exercice 1 : (*Limites* ♥) Si elles existent, Calculer les limites des suites de terme général suivant :

- 1) $(-2)^{2n+1}$ 2) $\sin(n) - n^2$ 3) $\tan \frac{1}{n}$ 4) $\frac{\arctan n}{1+n}$ 5) $\sum_{k=2}^n \ln k$ 6) $\ln(1+n^2) - \ln n$
7) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ 8) $(-1)^n + 2$ 9) $(-1)^n e^{-n}$ 10) $n^{\frac{1}{10}}$

Exercice 2 : (*Avec comparaison* ★ - ★★) Calculer les limites des suites de terme général suivant :

- 1) $\lfloor \sqrt{n} \rfloor - n$ 2) $\frac{3 \sin^2(n) + 5n}{\cos^3(n) + 2n}$ 3) $|\sin(e^n) - e^n|$ 4) $\frac{\ln n!}{n^2}$ 5) $\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}} \frac{1}{k}$

Indication : Pour la Q5 on pourra encadrer $\frac{1}{k}$ par l'intégrale de $f(t) = \frac{1}{t}$ en choisissant des bornes adaptées.

Exercice 3 : (*Partie entière et convergence* ★)

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, a-t-on convergence de la suite $(\lfloor u_n \rfloor)_{n \in \mathbb{N}}$? Et réciproquement ?

Exercice 4 : (*Suites stationnaires* ★★ - ★★★) On dit qu'une suite est stationnaire si et seulement si la suite est constante à partir d'un rang $N \in \mathbb{N}$. On a donc pour une telle suite : $\forall n \geq N, u_n = u_N$.

- 1) Montrer qu'une suite stationnaire est convergente.
2) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ une suite à valeur entières, montrer que $(u_n)_n$ est convergente si et seulement si $(u_n)_n$ est stationnaire.
3) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite périodique de période $T \in \mathbb{N}$ (c'est à dire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+T} = u_n$)
Montrer que $(u_n)_n$ est convergente $\iff (u_n)_n$ est stationnaire $\iff (u_n)_n$ est constante.

Exercice 5 : (★★ *Nombres rationnels et irrationnels*)

- 1) Montrer que pour tout nombre rationnel $q \in \mathbb{Q}$, il existe une suite de nombre irrationnels $(u_n)_n \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$ qui converge vers q .
2) Montrer que pour tout nombre irrationnel $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, il existe une suite de nombre rationnels $(q_n)_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers r .

Indication : On pourra s'aider de la partie entière. Par exemple pour $r = \pi$, on peut poser $q_0 = 3, q_1 = \frac{31}{10}, q_2 = \frac{314}{100}, \dots, q_n = \dots$

- 3) Application : Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer qu'il existe un nombre rationnel $q \in \mathbb{Q}$ tel que $q \in]a, b[$. De même, montrer qu'il existe un nombre irrationnel $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $r \in]a, b[$.

(Remarque : On dit que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.)

Exercice 6 : (*Suites adjacentes* ★) Montrer que les suites u_n et v_n définies ci-dessous sont adjacentes et qu'elles convergent :

- 1) $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$. 2) $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n^2}$.

Exercice 7 : ★★ On pose $0 < u_0 \leq v_0$ et $(u_n)_n, (v_n)_n$ définies par récurrence par :
$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

- 1) Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont bien définies et vérifient $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$
2) En déduire que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites adjacentes et qu'elles convergent.

Croissances comparées/ équivalents

Exercice 8 : (croissances comparées ♡) Calculer les limites des suites de terme général suivant :

- 1) $2^n - 4^n$ 2) $\frac{n2^n}{n!}$ 3) $\frac{2^n}{(2n)!}$ 4) $n^9 + n^8 - 2\sqrt{n}$ 5) $\frac{(n^2)!}{n!}$ 6) $\frac{2^{n!}}{8^n}$ 7) $\sqrt{n!} - \sqrt{n^n}$.
 8) $\frac{2^{n+1}\sqrt{n!}}{10^n}$ 9) $(n+2)! - n!$ 10) $\frac{n-n!}{n!+2n}$ 11) $\frac{n!-(n+1)!}{n}$ 12) $\frac{\sqrt{n!}+2^n}{n^3-2n!}$

Exercice 9 : ★ - ★★★ - ★★★★★ Calculer les limites des suites de terme général suivant :

- 1) $(n+2)! - n! - e^n$ 2) $\frac{\sin(n) - 2^n}{1 + \cos^2(n)}$ 3) $\sum_{k=0}^n \frac{e^k}{k^2}$ 4) $(\lfloor \sqrt{n} \rfloor)! - 2^n$

Exercice 10 : (Équivalents ♡) Trouver des équivalents simples des suites suivantes :

- 1) $\frac{n^2+2}{n-3}$ 2) $\frac{1}{n} + 1$ 3) $\frac{3^{n+1}-1}{\frac{1}{n^2}+3}$ 4) $\frac{(n+1)!}{n}$ 5) $n+1+n^2-3\sqrt{n}$ 6) $\sqrt{n}\frac{n^{\frac{3}{2}}-1}{n+1}$
 7) $(n^2+3n+1)^2$ 8) $\frac{\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n-1}}$ 9) $(n+1)(n+2)(n+3)$ 10) $\sum_{k=0}^n k$ 11) $\sum_{k=0}^n k^2$ 12) $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{n!}$.

Exercice 11 : ★ - ★★ Trouver des équivalents simples des suites de terme général suivant :

- 1) $u_n = \sum_{k=n}^{2n} 2^k$ 2) $u_n = \prod_{k=2}^n \frac{1+k}{1-k}$ 3) $u_n = \sum_{k=0}^n k!$

Exercice 12 : (Équivalent de la partie entière ★) 1) Montrer que $\lfloor n \rfloor \sim n$.

2) Montrer que si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ alors $\lfloor u_n \rfloor \sim u_n$

3) Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, peut-on trouver un équivalent de $\lfloor u_n \rfloor$ dans le cas général?

4) Calculer la limite de $\left\lfloor \frac{2^n+1}{\sqrt{4^n-1}} \right\rfloor$.

Exercice 13 : (Équivalent et coefficients binômiaux ★★) Si $k \in \mathbb{N}$, Trouver un équivalent de : $u_n = \binom{n}{k}$.

Récurrence avec une fonction

Exercice 14 : ★★ - ★★★★★ Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de $u_0 \in \mathbb{R}$:

- 1) $u_{n+1} = u_n e^{u_n}$ 2) $u_{n+1} = \arctan(u_n)$ 3) $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n+u_n^2}$ 4) $u_{n+1} = \cos(u_n)$.

Exercice 15 : ★★ On pose $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2-u_n}$.

1) Vérifier que $(u_n)_n$ est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$,

2) Si la suite converge, que vaut sa limite?

3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{2}{3}|u_n - 1|$

Indication : On pourra utiliser la quantité conjuguée de $u_{n+1} - 1$.

4) Conclure sur la convergence de u_n .