

TD 13 - Suites Réelles

1BCPST 2

Feuille d'exercice

Année 2022- 2023

Suites convergentes

Exercice 1 : (1 minute) Si elles existent, Calculer les limites des suites de terme général suivant :

- 1) $(-2)^{2n+1}$ 2) $\sin(n) - n^2$ 3) $\tan \frac{1}{n}$ 4) $\frac{\arctan n}{1+n}$ 5) $\sum_{k=2}^n \ln k$ 6) $\ln(1+n^2) - \ln n$
 7) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ 8) $(-1)^n + 2$ 9) $(-1)^n e^{-n}$ 10) $n^{\frac{1}{10}}$

Réponses : 1) $(-2)^{2n+1} = -2^{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boxed{+\infty}$

2) $\sin(n) - n^2 = n^2 \left(\frac{\sin n}{n^2} - 1 \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \times (0 - 1) = \boxed{-\infty}$ 3) $\tan \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \tan 0 = \boxed{0}$

4) $0 \leq \frac{\arctan n}{1+n} \leq \frac{\pi}{2(1+n)}$ donc $\frac{\arctan n}{1+n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boxed{0}$ par encadrement.

5) $\sum_{k=2}^n \ln k = \ln \left(\prod_{k=2}^n k \right) = \ln(n!) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boxed{+\infty}$

6) $\ln(1+n^2) - \ln n = \ln \left(\frac{1+n^2}{n} \right) = \ln \left(\frac{1}{n} + n \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(+\infty) = \boxed{+\infty}$

7) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boxed{0}$

8) $u_n = (-1)^n + 2$ n'admet pas de limite car $u_{2n} = 3 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3$ et $u_{2n+1} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \neq 3$

9) On a $-e^{-n} \leq (-1)^n e^{-n} \leq e^{-n}$ donc par encadrement $(-1)^n e^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boxed{0}$

10) $n^{\frac{1}{10}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boxed{+\infty}$, car c'est une puissance strictement positive.

Exercice 2 : (Avec comparaison) Calculer les limites des suites de terme général suivant :

- 1) $\lfloor \sqrt{n} \rfloor - n$ 2) $\frac{3 \sin^2(n) + 5n}{\cos^3(n) + 2n}$ 3) $|\sin(e^n) - e^n|$ 4) $\frac{\ln n!}{n^2}$ 5) $\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}} \frac{1}{k}$

Réponses : 1) On a $\sqrt{n} - 1 < \lfloor \sqrt{n} \rfloor \leq \sqrt{n} \Rightarrow \frac{\sqrt{n} - 1}{n} < \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n} \leq \frac{\sqrt{n}}{n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ Par

encadrement donc, on a $\frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On en déduit $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = o(n)$, autrement dit $\lfloor \sqrt{n} \rfloor - n \sim -n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boxed{-\infty}$.

2) $\frac{3 \sin^2(n) + 5n}{\cos^3(n) + 2n} = \frac{5n}{2n} \cdot \frac{3 \sin^2(n)/(5n) + 1}{\cos^3(n)/(2n) + 1} = \frac{5}{2} \cdot \frac{3 \sin^2(n)/(5n) + 1}{\cos^3(n)/(2n) + 1}$ Or $\frac{\sin^2(n)}{5n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{\cos^3(n)}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

car sin et cos sont bornées. On en déduit : $\frac{3 \sin^2(n) + 5n}{\cos^3(n) + 2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{2} \cdot \frac{0+1}{0+1} = \boxed{\frac{5}{2}}$

3) On a $-1 \leq \sin(e^n) \leq 1$ et comme $n \geq 0$, on a $e^n \geq 1$. Donc $\sin(e^n) - e^n \leq 1 - 1 = 0$ donc $|\sin(e^n) - e^n| = -(\sin(e^n) - e^n) = e^n - \sin(e^n)$. Par ailleurs $\frac{\sin(e^n)}{e^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ car sin est bornée. On en déduit $\sin(e^n) = o(e^n)$

et donc $e^n - \sin(e^n) \sim e^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. En conclusion $\boxed{|\sin(e^n) - e^n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty}$

4) On a $0 \leq \ln n! = \ln \left(\prod_{k=1}^n k \right) = \sum_{k=1}^n \ln k \leq \sum_{k=1}^n \ln n = n \ln n$ donc $0 \leq \frac{\ln n!}{n^2} \leq \frac{\ln n}{n}$.

Or par croissances comparées, on a $\frac{\ln n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On en déduit donc par encadrement : $\boxed{\frac{\ln n!}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}$.

5) On pose $u_n = \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}} \frac{1}{k}$. On a $\leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t}$ donc :

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}} \int_{k-1}^k \frac{dt}{t} \iff \int_{2^n}^{2^{n+1}+1} \frac{dt}{t} \leq u_n \leq \int_{2^n-1}^{2^{n+1}} \frac{dt}{t}$$

$$\iff \ln(2^{n+1} - 1) - \ln(2^n) \leq u_n \leq \ln(2^{n+1}) - \ln(2^n - 1).$$

Or $\ln(2^{n+1} - 1) - \ln(2^n) = \ln\left(\frac{2^{n+1} - 1}{2^n}\right) = \ln\left(2 - \frac{1}{2^n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln 2$ et

$$\ln(2^{n+1}) - \ln(2^n - 1) = \ln\left(\frac{2^{n+1}}{2^n - 1}\right) = -\ln\left(\frac{2^n - 1}{2^{n+1}}\right) - \ln\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln \frac{1}{2} = \ln 2$$

Par encadrement, on en déduit $\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln 2}$.

Exercice 3 : (Partie entière et convergence)

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, a-t-on convergence de la suite $(\lfloor u_n \rfloor)_{n \in \mathbb{N}}$?

.....

Réponses : Pas forcément, en effet on peut construire un contreexemple avec $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. On a $\frac{-1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ donc par encadrement $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Or on a $1 \leq u_{2n} < 0 \implies \lfloor u_{2n+1} \rfloor = -1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1$ et $0 \leq u_{2n} < 1$ donc $\lfloor u_{2n} \rfloor = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Comme les deux suites extraites de $(\lfloor u_n \rfloor)_n$ admettent une limite différente, on en déduit que la suite n'est pas convergente.

Exercice 4 : (Suites stationnaires) On dit qu'une suite est stationnaire si et seulement si la suite est constante à partir d'un rang $N \in \mathbb{N}$. On a donc pour une telle suite : $\forall n \geq N, u_n = u_N$.

1) Montrer qu'une suite stationnaire est convergente.

2) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ une suite à valeur entières, montrer que $(u_n)_n$ est convergente si et seulement si $(u_n)_n$ est stationnaire.

3) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite périodique de période $T \in \mathbb{N}$ (c'est à dire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+T} = u_n$) Montrer que $(u_n)_n$ est convergente $\iff (u_n)_n$ est stationnaire $\iff (u_n)_n$ est constante.

.....

Réponses : 1) $\boxed{\iff}$ c'est évident, en effet, si la suite est stationnaire alors $\forall n \geq N, u_n = u_N$, donc

$$\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u_N}.$$

$\boxed{\implies}$ $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, donc pour $\varepsilon = \frac{1}{4}$, si on écrit la définition de la convergence de u_n , on a :

$$\exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \frac{1}{4}.$$

On a donc $\forall n \geq N, |u_n - u_N| = |u_n - \ell + \ell - u_N| \leq |u_n - \ell| + |u_N - \ell| \leq \frac{1}{2}$ par inégalité triangulaire.

On a donc $u_N - u_n \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Or, $u_n \in \mathbb{Z}$ pour tout n , donc $u_N - u_n \in \mathbb{Z} \cap \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = \{0\}$.

Donc $u_N - u_n = 0$. C'est à dire, pour tout $n \geq N, u_n = u_N$. donc $\boxed{u_n \text{ est stationnaire}}$.

2) On note $\underbrace{(u_n)_n \text{ est convergente}}_{(1)} \iff \underbrace{(u_n)_n \text{ est stationnaire}}_{(2)} \iff \underbrace{(u_n)_n \text{ est constante}}_{(3)}$.

Le chemin le plus simple pour prouver cela est $(1) \implies (3) \implies (2) \implies (1)$ en effet :

$\boxed{(3) \implies (2)}$ est évident : une suite constante est stationnaire à partir du rang 0

$\boxed{(2) \implies (1)}$ a été démontré aussi à la question 1)

$(1) \implies (3)$ est le plus compliqué. Il faut démontrer que si $(u_n)_n$ est périodique et convergente alors elle est constante. Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas : Si $(u_n)_n$ n'est pas constante alors $\exists n_0, n_1 \mid u_{n_0} \neq u_{n_1}$

On pose $d = |u_{n_0} - u_{n_1}| > 0$ donc en posant $\varepsilon = \frac{d}{2}$ comme u_n converge, $\exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \frac{d}{2}$ (*).

Or $\exists k_0 \in \mathbb{N} \mid k_0 T + n_0 \geq N$ (il suffit de prendre $k_0 > \frac{N - n_0}{T}$) et de même, il existe $k_1 \in \mathbb{N} \mid k_1 T + n_1 \geq N$.

On prend $k = \max(k_0, k_1)$, on a alors $kT + n_0 \geq k_0 T + n_0 \geq N$ et $kT + n_1 \geq k_1 T + n_1 \geq N$. Par ailleurs comme u_n est T -périodique, on a $u_{kT+n_0} = u_{n_0}$ et $u_{kT+n_1} = u_{n_1}$

On en déduit d'après (*) : $|u_{kT+n_0} - u_{kT+n_1}| < \frac{d}{2} \iff |u_{n_0} - u_{n_1}| < \frac{d}{2} \iff d < \frac{d}{2} \iff \frac{d}{2} < 0 \iff d < 0$

C'est contradictoire car par hypothèse $u_{n_0} \neq u_{n_1} \implies d = |u_{n_0} - u_{n_1}| > 0$.

On en déduit $\forall n_0, n_1 \in \mathbb{N}, u_{n_0} = u_{n_1}$ donc $(u_n)_n$ est constante.

Exercice 5 : (Nombres rationnels et irrationnels)

1) Montrer que pour tout nombre rationnel $q \in \mathbb{Q}$, il existe une suite de nombre irrationnels $(u_n)_n \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$ qui converge vers q .

2) Montrer que pour tout nombre irrationnel $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, il existe une suite de nombre rationnels $(q_n)_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers r .

Indication : On pourra s'aider de la partie entière. Par exemple pour $r = \pi$, on peut poser $q_0 = 3, q_1 = \frac{31}{10},$

$q_2 = \frac{314}{100}, \dots, q_n = \dots$

3) Application : Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer qu'il existe un nombre rationnel $q \in \mathbb{Q}$ tel que $q \in]a, b[$. De même, montrer qu'il existe un nombre irrationnel $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $r \in]a, b[$.

.....

Réponses : 1) Si $q \in \mathbb{Q}$, on pose $u_n = q + \frac{\sqrt{2}}{n}$. On a alors bien $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} q$ et $u_n \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ car par l'absurde, si on avait $u_n \in \mathbb{Q}$, alors on aurait $\sqrt{2} = n(u_n - q) \in \mathbb{Q}$ ce qui est faux. On a donc bien $(u_n)_n \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$ qui converge vers q .

2) Si $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on pose $u_n = \frac{[10^n \cdot r]}{10^n} \in \mathbb{Q}$. D'après l'exercice 13 question 2), on a $u_n \simeq \frac{10^n r}{10^n} = r$ donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} r$

3) On prend $a, b \in \mathbb{R}$. On sait que $m = \frac{a+b}{2} \in]a, b[$ car c'est le milieu de a, b . On a soit $m \in \mathbb{Q}$, soit $m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On fait une disjonction de cas :

Si $m \in \mathbb{Q}$, alors il existe un nombre rationnel dans $]a, b[$. Reste à montrer qu'il existe aussi un nombre irrationnel. D'après la question 1), on a l'existence d'une suite $(u_n)_n \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} m$. On en déduit, $u_n - a \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} m - a > 0$ donc à partir d'un certain rang N_1 , la suite $(u_n - a)_n$ est du même signe que $m - a$, c'est à dire : $\forall n \geq N_1, u_n - a > 0 \iff u_n > a$.

De même $u_n - b \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} m - b < 0$ donc à partir d'un certain rang N_2 on a $\forall n \geq N_2, u_n - b < 0 \iff u_n < b$.

En conclusion, si on prend $N = \max(N_1, N_2)$, on a alors $a < u_N < b$ donc $u_N \in]a, b[$ et $u_N \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

u_N est donc un nombre irrationnel contenu dans $]a, b[$

Si $m \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, c'est exactement le même raisonnement. La seule différence est que la suite (u_n) sera cette fois une suite de nombres rationnels.

Exercice 6 : (Suites adjacentes) Montrer que les suites u_n et v_n définies ci-dessous sont adjacentes et qu'elles convergent :

1) $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$. 2) $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n^2}$.

.....

Réponses : 1) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$ donc $(u_n)_n$ est croissante.

$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)^2} \leq 0$ donc $(v_n)_n$ est décroissante.

On a $v_n - u_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ Finalement on a $v_n - u_n = \frac{1}{n} \leq 0$ donc $v_n \geq u_n$.

u_n et v_n sont donc adjacentes.

2) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^3} \geq 0$ donc $(u_n)_n$ est croissante.

$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)^3} - \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = -\frac{n^2+3n+1}{n^2(n+1)^3} \leq 0$ à partir d'un certain rang car $n^2+3n+1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. donc $(v_n)_n$ est décroissante à partir d'un certain rang.

On a $v_n - u_n = \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ Finalement on a $v_n - u_n = \frac{1}{n^2} \leq 0$ donc $v_n \geq u_n$.

u_n et v_n sont donc adjacentes (à partir d'un certain rang).

Exercice 7 : On pose $0 < u_0 \leq v_0$ et $(u_n)_n, (v_n)_n$ définies par récurrence par : $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$

1) Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont bien définies et vérifient $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$

2) En déduire que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites adjacentes et qu'elles convergent.

.....

Réponses : 1) Par récurrence. Initialisation : Pour $n = 0$ c'est vrai car $0 < u_0 < v_0$

Hérédité : Si c'est vrai au rang n alors :

Comme $u_n > 0$ et $v_n > 0$ alors u_{n+1} est bien défini. Par ailleurs : On a $2(v_{n+1} - u_{n+1}) = u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n} = (\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2 \geq 0$ donc $v_{n+1} \geq u_{n+1}$. C'est donc vrai au rang $n+1$.

2) On a $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geq \sqrt{u_n^2} = |u_n| = u_n$ donc $(u_n)_n$ est croissante.

On a $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \leq \frac{v_n + v_n}{2} = v_n$ donc $(v_n)_n$ est décroissante.

7 D'après la question précédente on a aussi $u_n \leq v_n$.

Enfin, $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2$ (*). On veut montrer que ça tend vers 0. On a u_n croissante majorée par v_0 donc convergente vers ℓ et v_n décroissante minorée par u_0 donc converge vers ℓ' .

On passe à la limite dans (*), on trouve :

$$\ell' - \ell = \frac{1}{2}(\sqrt{\ell} - \sqrt{\ell'})^2 \iff \sqrt{\ell'}^2 - \sqrt{\ell}^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{\ell} - \sqrt{\ell'})^2 \iff \sqrt{\ell'} + \sqrt{\ell} = \frac{1}{2}(\sqrt{\ell} - \sqrt{\ell'}) \iff 3\sqrt{\ell'} = -\sqrt{\ell}$$

la seule possibilité est donc $\ell = \ell' = 0$ ou $\sqrt{\ell'} - \sqrt{\ell} = 0 \iff \ell = \ell'$. Finalement dans tous les cas on trouve que u_n et v_n convergent vers la même limite ℓ ainsi on a bien $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et les suites sont adjacentes.

Croissances comparées/ équivalents

Exercice 8 : (1 minute) Calculer les limites des suites de terme général suivant :

- 1) $2^n - 4^n$ 2) $\frac{n2^n}{n!}$ 3) $\frac{2^n}{(2n)!}$ 4) $n^9 + n^8 - 2\sqrt{n}$. 5) $\frac{(n^2)!}{n!}$ 6) $\frac{2^{n!}}{8^n}$ 7) $\sqrt{n!} - \sqrt{n^n}$.
 8) $\frac{2^{n+1}\sqrt{n!}}{10^n}$ 9) $(n+2)! - n!$ 10) $\frac{n-n!}{n!+2n}$ 11) $\frac{n! - (n+1)!}{n}$ 12) $\frac{\sqrt{n!} + 2^n}{n^3 - 2n!}$

.....

Réponses : 1) $2^n - 4^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$ 2) $\frac{n2^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ 3) $\frac{2^n}{(2n)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

- 4) $n^9 + n^8 - 2^{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$. 5) $\frac{(n^2)!}{n!} \geq (n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc $\frac{(n^2)!}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$
- 6) $\frac{2^{n!}}{8^n} = 2^{n!-3n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ 7) $\sqrt{n!} - \sqrt{n^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$.
- 8) $\frac{2^{n+1}\sqrt{n!}}{10^n} = 2\sqrt{\frac{n!}{5^{2n}}} = 2\sqrt{\frac{n!}{25^n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$
- 9) $(n+2)! - n! = n!((n+2)(n+1) - 1) = n!(n^2 + 3n + 1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$
- 10) $\frac{n-n!}{n!+2n} \sim \frac{-n!}{n!} = -1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1$ 11) $\frac{n! - (n+1)!}{n} = \frac{n!(1 - (n+1))}{n} = -n! \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$
- 12) $\frac{\sqrt{n!} + 2^n}{n^3 - 2n!} \sim -\frac{\sqrt{n!}}{2n!} = -\frac{1}{2\sqrt{n!}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Exercice 9 : Calculer les limites des suites de terme général suivant :

- 1) $(n+2)! - n! - e^n$ 2) $\frac{\sin(n) - 2^n}{1 + \cos^2(n)}$ 3) $\sum_{k=0}^n \frac{e^k}{k^2}$ 4) $(\lfloor \sqrt{n} \rfloor)! - 2^n$

Réponses : 1) $(n+2)! - n! - e^n = n!(n^2 + 3n + 1) - e^n = n^2 \cdot n! + 3n \cdot n! + n! - e^n \sim n^2 \cdot n! \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boxed{+\infty}$

2) $\cos^2(n) \geq 0 \implies 1 + \cos^2(n) \geq 1$. Donc $\frac{\sin(n) - 2^n}{1 + \cos^2(n)} \leq \frac{\sin(n) - 2^n}{1} = \sin(n) - 2^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$

3) On a $\frac{e^n}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ par croissances comparées. Or $\sum_{k=0}^n \frac{e^k}{k^2} \geq \frac{e^n}{n^2}$. Par encadrement, on a donc $\boxed{\sum_{k=0}^n \frac{e^k}{k^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty}$.

4) On a si $u_N = \frac{2^{N^2}}{N!}$ alors $\frac{u_{N+1}}{u_N} = \frac{2^{(N+1)^2} N!}{2^{N^2} (N+1)!} = \frac{2^{2N+1}}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$. On a donc à partir d'un certain rang : $\exists N_0 \mid \forall N \geq N_0, \frac{u_{N+1}}{u_N} \geq 2$. Ainsi $\forall N \geq N_0, u_{N+1} \geq 2u_N$.

Par récurrence immédiate, on a donc $\forall N \geq N_0, u_N \geq 2^{N-N_0} u_{N_0} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$.

Ainsi $u_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$ et donc $N! = o(2^{N^2})$. Pour $N = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, on a donc $\lfloor \sqrt{n} \rfloor! = o(2^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor^2})$

Or $\lfloor \sqrt{n} \rfloor \leq \sqrt{n} \implies \lfloor \sqrt{n} \rfloor^2 \leq n \implies 2^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor^2} \leq 2^n \implies 2^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor^2} = O(2^n)$

Donc $\lfloor \sqrt{n} \rfloor! = o(2^n)$. Ainsi $(\lfloor \sqrt{n} \rfloor)! - 2^n \sim -2^n$. Donc $\boxed{(\lfloor \sqrt{n} \rfloor)! - 2^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty}$

Exercice 10 : (1 minute) Trouver des équivalents simples des suites suivantes :

- 1) $\frac{n^2+2}{n-3}$ 2) $\frac{1}{n} + 1$ 3) $\frac{3^{n+1}-1}{\frac{1}{n^2}+3}$ 4) $\frac{(n+1)!}{n}$ 5) $n+1+n^2-3\sqrt{n}$ 6) $\sqrt{n} \frac{n^{\frac{3}{2}}-1}{n+1}$
- 7) $(n^2+3n+1)^2$ 8) $\frac{\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n-1}}$ 9) $(n+1)(n+2)(n+3)$ 10) $\sum_{k=0}^n k$ 11) $\sum_{k=0}^n k^2$ 12) $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{n!}$.

Réponses : 1) $\frac{n^2+2}{n-3} \sim n$ 2) $\frac{1}{n} + 1 \sim 1$ 3) $\frac{3^{n+1}-1}{\frac{1}{n^2}+3} \sim 3^n$ 4) $\frac{(n+1)!}{n} \sim n!$

5) $n+1+n^2-3\sqrt{n} \sim n^2$ 6) $\sqrt{n} \frac{n^{\frac{3}{2}}-1}{n+1} \sim n$ 7) $(n^2+3n+1)^2 \sim n^4$ 8) $\frac{\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n-1}} \sim \frac{1}{n}$

9) $(n+1)(n+2)(n+3) \sim n^3$ 10) $\sum_{k=0}^n k \sim \frac{n^2}{2}$ 11) $\sum_{k=0}^n k^2 \sim \frac{n^3}{3}$ 12) $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{n!} \sim \frac{1}{2^n}$.

Exercice 11 : Trouver des équivalents simples des suites de terme général suivant :

- 1) $u_n = \sum_{k=n}^{2n} 2^k$ 2) $u_n = \prod_{k=1}^n \frac{1+k}{1-k}$ 3) $u_n = \sum_{k=0}^n k!$

Réponses : 1) $u_n = \sum_{k=n}^{2n} 2^k = \sum_{k=0}^{2n} 2^k - \sum_{k=0}^n 2^k$ Or $\sum_{k=0}^n 2^k = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} \sim 2^{n+1}$

et donc $\sum_{k=0}^{2n} 2^k \sim 2^{2n+1}$. Ce terme domine car on a $2^{n+1} = o(2^{2n+1})$, On en déduit : $u_n \sim 2^{2n+1}$.

$$2) u_n = \prod_{k=2}^n \frac{1+k}{1-k} = \prod_{k=2}^n -\frac{k+1}{k-1} = (-1)^n \prod_{k=2}^n \frac{k+1}{k-1} \underset{(*)}{=} (-1)^n \frac{(n+1) \times n}{1 \times 2} \sim \boxed{\frac{(-1)^n n^2}{2}}$$

(*) on reconnaît un produit télescopique. Ce résultat est vrai pour $n \geq 2$.

$$3) u_n = \sum_{k=0}^n k! = n! + \sum_{k=0}^{n-1} k!. \text{ Le terme } n! \text{ a l'air dominant, on va le prouver.}$$

On a $\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} k! = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{n!}$ avec $\frac{k!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)\dots(k+1)} \leq \frac{1}{n(n-1)}$ si $k < n-1$.

Autre manière de le voir : $k < n-1 \implies k! \leq (n-2)! \implies \frac{k!}{n!} \leq \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$

Donc :

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} k! = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{n!} = \frac{1}{n} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} \leq \frac{1}{n} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n(n-1)} = \frac{2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \text{ En conclusion on a bien}$$

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} k! \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc } \sum_{k=0}^{n-1} k! = o(n!) \text{ donc } \boxed{u_n \sim n!}$$

Exercice 12 : (Équivalent de la partie entière) 1) Montrer que $\lfloor n \rfloor \sim n$.

2) Montrer que si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ alors $\lfloor u_n \rfloor \sim u_n$

3) Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, peut-on trouver un équivalent de $\lfloor u_n \rfloor$ dans le cas général ?

4) Calculer la limite de $\left\lfloor \frac{2^n + 1}{\sqrt{4^n - 1}} \right\rfloor$.

Réponses : 1) On a $n-1 < \lfloor n \rfloor \leq n \iff 1 - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor n \rfloor}{n} \leq 1$.

Par encadrement, on a $\frac{\lfloor n \rfloor}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc $\boxed{\lfloor n \rfloor \sim n}$.

2) On raisonne exactement pareil, à partir d'un certain rang N , on a $\forall n \geq N, u_n > 0$. Donc $u_n - 1 < \lfloor u_n \rfloor \leq u_n \iff 1 - \frac{1}{u_n} < \frac{\lfloor u_n \rfloor}{u_n} \leq 1$. Par encadrement, on a $\frac{\lfloor u_n \rfloor}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ donc $\boxed{\lfloor u_n \rfloor \sim u_n}$.

3) Non. Par exemple si $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ alors on a $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ mais on a $\lfloor u_n \rfloor = 1 + (-1)^n$ et on n'a pas d'équivalent plus simple.

Par ailleurs si $u_n = 2$ on a $\lfloor u_n \rfloor = 2 \sim 2 = \lfloor \ell \rfloor$.

4) On a $\frac{2^n + 1}{\sqrt{4^n - 1}} \sim 1$. Par ailleurs $\frac{2^n + 1}{\sqrt{4^n - 1}} = \frac{2^n + 1}{\sqrt{(2^n + 1)(2^n - 1)}} = \sqrt{\frac{2^n + 1}{2^n - 1}} \geq 1$.

On en déduit qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, 0 \leq u_n - 1 \leq \frac{1}{2}$. Donc $1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$ donc $\forall n \geq N, \lfloor u_n \rfloor = 1$.

On en déduit $\left\lfloor \frac{2^n + 1}{\sqrt{4^n - 1}} \right\rfloor \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

Exercice 13 : (Équivalent et coefficients binômiaux) Si $k \in \mathbb{N}$, Trouver un équivalent de : $u_n = \binom{n}{k}$.

Réponses : On a $u_n = \frac{n!}{k!((n-k)!)}$. Or $n! = \prod_{i=1}^n i = \prod_{i=n-k+1}^n i(n-k)!$. Donc $u_n = \frac{1}{k!} \prod_{i=n-k+1}^n i$.

On montre que $\prod_{i=n-k+1}^n i = \underbrace{n(n-1)\dots(n-k+1)}_{k \text{ termes}} \sim n^k$.

On pose $j = i - n + k$: $\prod_{j=1}^k (j - k + n)$. $\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on a fixé j et k et on a donc $j - k + n \sim n$. Comme l'équivalent est compatible avec le produit et qu'on a un produit de k termes (k est constant : ne dépend pas de n). on a donc $\prod_{j=1}^k (j - k + n) \sim \prod_{j=1}^k n = n^k$

Finalement $\boxed{u_n \sim \frac{n^k}{k!}}$.

Récurrance avec une fonction

Exercice 14 : Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de $u_0 \in \mathbb{R}$:

1) $u_{n+1} = u_n e^{u_n}$ 2) $u_{n+1} = \arctan(u_n)$ 3) $u_{n+1} = \cos(u_n)$. 4) $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n + u_n^2}$

Réponses : 1) On pose $f(x) = x e^x$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = (x+1)e^x$. Donc $f'(x) \geq 0 \iff x \geq -1$. Par ailleurs, $f(x) - x > 0 \iff x(e^x - 1) \geq 0 \iff (x > 0 \text{ et } e^x \geq 1) \text{ ou } (x < 0 \text{ et } e^x \leq 1)$
C'est donc toujours vrai. On a donc :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$			$+$			$+$	
$f(x)$	0	$\longrightarrow$		$-e^{-1}$	$\longleftarrow 0$		$+\infty$
$f(x) - x$	0		$+$		$+$		0
							$+$

$u_0 \in]0, +\infty[$: alors comme $f(]0, +\infty[) =]0, +\infty[$, on a $u_n \in]0, +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (récurrance immédiate). Par ailleurs, on a $f(u_n) - u_n \geq 0$ donc (u_n) est croissante.

Soit elle converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, soit elle diverge vers $+\infty$.

Si elle converge vers ℓ alors $\ell e^\ell = \ell$ donc $\ell = 0$ est la seule possibilité par continuité de f .

C'est impossible car par croissance de la suite, on a $u_n \geq u_0 > 0 \implies \ell \geq u_0 > 0$ par passage à la limite.

Donc $\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty}$.

$u_0 \in [-1, 0]$: On a $f([-1, 0]) \subset]-e^{-1}, 0] \subset]-1, 0]$. On a donc $u_n \in]-1, 0]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par ailleurs, $(u_n)_n$ est croissante est bornée. On en déduit : $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}$. La limite ℓ étant un point fixe de f , on

trouve $\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}$.

$u_0 \in]-\infty, -1[$: Alors $f(]-\infty, -1[) \subset]-e^{-1}, 0] \subset]-1, 0]$. Donc $u_1 \in]-1, 0]$. On se ramène donc au cas précédent et on trouve

$\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}$.

2) $u_{n+1} = \arctan(u_n)$. On peut faire directement le tableau de $f = \arctan$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	$0 \nearrow \frac{\pi}{2}$	
$f(x) - x$	$+$	0	$-$

$u_0 \in \mathbb{R}_+ :$ Alors $f(\mathbb{R}_+) \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\subset \mathbb{R}_+$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}_+$.

On a par ailleurs, u_n décroissante donc $\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}$.

$u_0 \in \mathbb{R}_- :$ Alors $f(\mathbb{R}_-) \subset \left] -\frac{\pi}{2}, 0 \right] \subset \mathbb{R}_-$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}_-$.

On a par ailleurs, u_n croissante donc $\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}$.

3) $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n + u_n^2}$. On pose $f(x) = \sqrt{1 + x + x^2}$ et on remarque que $D_f = \mathbb{R}$ en faisant le calcul du $\Delta = -3$. On a par ailleurs, $f(x) - x \geq 0 \iff \sqrt{1 + x + x^2} \geq x$ ce qui est toujours vrai : en effet c'est évident quand $x \leq 0$ et si $x \geq 0$ alors $\sqrt{1 + x + x^2} \geq x \iff 1 + x + x^2 \geq x^2 \iff 1 + x \geq 0$ ce qui est vrai car $x \geq 0$.

On n'a donc même pas besoin d'étudier les variations de f , on a $\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} \geq u_n$. La suite $(u_n)_n$ est donc croissante. Par monotonie, soit elle admet une limite finie ℓ , soit elle diverge vers $+\infty$. Or, l'équation $f(\ell) = \ell$ n'admet pas de solution. On en déduit que $\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty}$.

4) $u_{n+1} = \cos(u_n)$. Dans tous les cas on a $u_1 = \cos(u_0) \in [-1, 1]$, donc faisons déjà l'étude sur u_1 , ce qui permettra de réduire l'intervalle d'étude à $[-1, 1]$.

On pose $g(x) = \cos(x) - x$. On a $g'(x) = -\sin x - 1 \leq 0$ donc g est décroissante. Par ailleurs, $g(0) > 0$ et $g(1) < 0$. On en déduit par le théorème des valeurs intermédiaires que g s'annule en $\alpha \in]0, 1[$.

On peut faire directement le tableau de variation :

x	-1	0	α	1
$f(x)$	$\cos(1)$	1	α	$\cos(1)$
$f(x) - x$	$+$	$+$	0	$-$

$u_1 \in [\alpha, 1] :$ Alors $f([\alpha, 1]) \subset [\alpha, \cos(1)] \subset [\alpha, 1]$ donc pour tout $n \geq 1$, $u_n \in [\alpha, 1]$.

On a par ailleurs, u_n décroissante donc $\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha}$.

$u_1 \in [\cos(1), \alpha] :$ Alors $f([\cos(1), \alpha]) \subset [\alpha, f(\cos(1))] \subset [\alpha, 1[$ car $f(\cos(1)) \geq f(\alpha) = \alpha$ la fonction f étant décroissante sur $[0, 1]$. Donc $u_2 \in [\alpha, 1]$ et on se ramène au cas précédent pour obtenir : $\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha}$.

$u_1 \in [-1, \alpha] :$ Alors $f([-1, \alpha]) \subset [\cos(1), 1]$. Si $u_2 \in [\alpha, 1]$, alors on se ramène au premier cas.

Si $u_2 \in [\cos(1), \alpha]$, alors on se ramène au deuxième cas.

Dans tous les cas $\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha}$.

On en déduit $\boxed{\forall u_0 \in \mathbb{R}, u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha}$.

Exercice 15 : On pose $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N} \ u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$.

1) Vérifier que $(u_n)_n$ est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$,

2) Si la suite converge, que vaut sa limite ?

3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - 1| \leq \frac{2}{3}|u_n - 1|$

4) Conclure sur la convergence de u_n .

.....

Réponses : 1) On montre cela par récurrence. Initialisation : On a bien $u_0 \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

Hérédité : Si c'est vrai au rang n alors on a :

$$\frac{-3}{2} \leq -u_n \leq \frac{-1}{2} \iff \frac{1}{2} \leq 2 - u_n \leq \frac{3}{2} \iff \sqrt{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2 - u_n} \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \implies u_{n+1} \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$$

$$\text{car } \frac{1}{2} \leq 1 \implies \sqrt{\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2} \text{ et } \frac{2}{3} \geq 1 \implies \sqrt{\frac{2}{3}} \leq \frac{2}{3}$$

C'est donc vrai au rang $n + 1$.

u_{n+1} est bien défini à condition que $u_n \leq 2$, ce qui est bien le cas, car d'après la récurrence, $u_n \leq \frac{3}{2}$.

2) On a $\ell \geq 0$ et $\ell = \sqrt{2 - \ell} \iff \ell^2 = 2 - \ell \iff \ell^2 + \ell - 2 = 0$. On a $\Delta = 9$ et $x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1 > 0$ ou $x_2 = \frac{-1-3}{2} = -2 < 0$. Comme ℓ est positive, on en déduit $\boxed{\ell = 1}$

$$3) \text{ On a } |u_{n+1} - 1| = |\sqrt{2 - u_n} - 1| = \left| \frac{2 - u_n - 1}{\sqrt{2 - u_n} + 1} \right| = \frac{|1 - u_n|}{u_{n+1} + 1} \leq \frac{2}{3}|1 - u_n|$$

Car $u_{n+1} + 1 \geq \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \geq 0$ donc par décroissance de l'inverse sur $\mathbb{R}_+$, on a $\frac{1}{u_{n+1} + 1} \leq \frac{2}{3}$

4) On pose $v_n = |u_n - 1|$. Par récurrence immédiate, on a $v_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n v_0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On en déduit $|u_n - 1| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Cela est équivalent à dire que $\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1}$.
