

TD 14 - Limites et continuité de fonctions

1BCPST 2

Feuille d'exercice

Année 2025- 2026

Croissances comparées / Equivalents

Exercice 1 : ♡ Calculer les limites suivantes et dire s'il s'agit ou pas de croissance comparées :

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x}$ 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x$ 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^7 e^{-3x^2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^7 e^{-3x^2}$ 4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^9 \sqrt{e^x}$
 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^2 x^{-5} e^{\sqrt{x}}$ 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{e^x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{e^x}$ 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^3 - e^{x^2}$ 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)^2 + x}{e^x - x}$
 9) $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln \left(\frac{x}{1+x} \right)$ 10) $\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$, limites quand x tend vers $\pm\infty$ et 0^+ et 0^- .

Exercice 2 : ★ Calculer les limites suivantes :

- 1) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x \ln(\ln x)$ 2) $\lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ 3) $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) \ln \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right)$ 4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\tan x}}{\cos x}$ 5) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\exp\left(\frac{1}{1-x}\right)}{\sqrt{x^2-1}}$

Exercice 3 : ♡ Calculer des équivalents simples des fonctions suivantes :

- 1) $\frac{x^2 + x + 1}{x^3 + 2x + 3}$ en 0 en -1 et en $+\infty$ 2) $\frac{\ln x + x}{xe^x + x^2}$ en 0 et $+\infty$ 3) $\sqrt{x}e^{x^2} + e^x - \sin x$ en $\pm\infty$ et 0.
 4) $\frac{1}{x+1} + \sqrt{x+1}$ en -1 et en $+\infty$. 5) $\frac{1}{1-x^2}$ en -1 et 1 6) $x^2 + 2x + 3$ en -1 et en -2
 7) $\arctan x$ en $\pm\infty$ 8) $\frac{\ln(1+e^x)}{x+1}$ en 0 et $+\infty$ 9) $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ en 0 et $+\infty$. 10) $\frac{x^\pi + x^e}{\pi^x + e^x}$ en 0 et $+\infty$.

Continuité

Exercice 4 : ♡ - ★ Pour chacune des fonctions, dire si elle a une limite à gauche, à droite et enfin si elle est continue en a :

- 1) $x \mapsto \frac{x}{|x|}$ en $a = 0$ 2) $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ en $a = 2$. 3) $x \mapsto x \left| 1 - \frac{1}{x} \right|$ en $a = 0$ 4) $x \mapsto \sqrt{x} \ln|x|$ en $a = 0$
 5) $x \mapsto |x| \ln|x|$ en $a = 0$ 6) $x \mapsto \frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1}$ en $a = 1$ 7) $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en $a = 0$.

Exercice 5 : ♡ Donner les ensembles de continuité des fonctions suivantes :

- 1) $x \mapsto \frac{1}{\ln x}$ 2) $x \mapsto \sin(1 + e^x)$ 3) $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ 4) $x \mapsto \frac{e^x + 1}{x^2 - 3}$ 5) $x \mapsto (x+1)^\pi$
 6) $x \mapsto \ln|\cos(x)|$ 7) $x \mapsto \lfloor \arctan x \rfloor$ 8) $x \mapsto \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ 9) $x \mapsto \frac{x^5 + 2x^4 + 1}{x^2 + 4x - 5}$

Exercice 6 : ★ - ★★ Donner les ensembles de continuité des fonctions suivantes :

- 1) $x \mapsto \sqrt{1 - \sqrt{x}}$ 2) $x \mapsto \sqrt{2x - x^2 - 2}$ 3) $x \mapsto \ln\left(\frac{1-x^2}{x^2 + 4x - 5}\right)$ 4) $x \mapsto \sqrt{\ln x}$
 5) $x \mapsto \ln(\arctan^2 x - 3)$ 6) $x \mapsto \ln \sqrt{1 - e^x}$ 7) $x \mapsto \sqrt{\tan x} + \ln(-\tan x)$ 8) $x \mapsto (\sin x)^{\tan x}$

Exercice 7 : ★ Donner l'ensemble de continuité des fonctions suivantes (et justifier) :

- 1) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq -1 \\ \ln(-1-x) & \text{sinon} \end{cases}$ 2) $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ \sqrt{-x} & \text{sinon} \end{cases}$ 3) $h(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & \text{si } x \in]-1, 1[\\ \frac{1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$
 4) $f \circ g$ 5) $g \circ f$ 6) $g \circ h$ 7) $h \circ f$

Exercice 8 : ★ Donner l'ensemble de définition et de continuité de ces fonctions et calculer leur prolongement par continuité : 1) $x \mapsto x \ln x$ 2) $x \mapsto x^{-\ln x}$ 3) $x \mapsto e^{-\frac{1}{|x|}}$ 4) $x \mapsto \frac{\sqrt{|x-1|}}{x^2-1}$

Exercice 9 : (★★ continuité et partie entière)

- 1) Montrer que la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{2}(2x - \lfloor x \rfloor - 1)$ est continue sur $\mathbb{R}$
- 2) Étudier la continuité de la fonction $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

Exercice 10 : ★ Montrer que toute fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

Exercice 11 : ★★ Soit $f \in C^0([0, 1])$ telle que $f([0, 1]) \subset [0, 1]$, montrer que f admet un point fixe, c'est à dire qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 12 : ★ On dit que f est lipschitzienne sur I si et seulement si il existe $k > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Montrer que si f est lipschitzienne sur I alors f est continue sur I .

Exercice 13 : ★★ Trouver l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ qui vérifient les égalités suivantes :

- 1) $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$
- 2) $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x)f(y)$

Indication : On pourra utiliser le résultat que tout nombre irrationnel est limite d'une suite de nombres rationnels.

Exercice 14 : ★ - ★★ On pose $f(x) = xe^x$

- 1) Donner l'ensemble de définition, de continuité et de dérivabilité de f et dresser son tableau de variation.
- 2) En déduire que f est bijective sur $I = [-1, +\infty[$ et calculer $f(I)$.
- 3) Quels sont les ensembles de départ et d'arrivée de f^{-1} ? Justifier que f^{-1} est continue. Quel est le sens de variation de f^{-1} ?
- 4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(u_n) = n$.
- 5) Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)_n$? Admet-elle une limite quand $n \rightarrow +\infty$?
- 6) Montrer que $u_n \sim \ln n$.
- 7) Calculer $f^{-1}(0)$ et trouver un équivalent simple en 0 de $f^{-1}(x)$.

Exercice 15 : ★★ On pose $f_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^k$.

- 1) Pour tout $n \geq 1$, montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ que l'on notera u_n .
- 2) En comparant $f_{n+1}(u_n)$ et $f_{n+1}(u_{n+1})$, montrer que la suite $(u_n)_n$ est monotone.
- 3) En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge.

Exercice 16 : (croissance et continuité ★★) Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, continue en a .

- 1) Montrer que si f est croissante sur $]a, b]$ alors f est croissante sur $[a, b]$.
- 2) Montrer que f est strictement croissante sur $]a, b]$ alors f est strictement croissante sur $[a, b]$.

Exercice 17 : ★★★ Étudier la continuité de la fonction $f : x \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$.

Exercice 18 : (★★★★ Avec la définition de la continuité) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

On pose la fonction $\varphi : x \mapsto \begin{cases} \max_{[0, x]} f & \text{si } x > 0 \\ \max_{[x, 0]} f & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

- 1) Justifier que φ est définie sur $\mathbb{R}$.
- 2) Déterminer φ dans le cas où $f = \exp$ et $f = \sin$
- 3) Montrer que φ est continue.
- 4) Montrer qu'on peut avoir φ définie sur $\mathbb{R}$ et continue sans avoir f continue.