

TD 14 - Limites et continuité de fonctions

1BCPST 2

Feuille d'exercice

Année 2022- 2023

Croissances comparées / Equivalents

Exercice 1 : (1 minute) Calculer les limites suivantes et dire s'il s'agit ou pas de croissance comparées :

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x}$ 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x$ 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^7 e^{-3x^2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^7 e^{-3x^2}$ 4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^9 \sqrt{e^x}$
 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^2 x^{-5} e^{\sqrt{x}}$ 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{e^x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{e^x}$ 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^3 - e^{x^2}$ 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)^2 + x}{e^x - x}$
 9) $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$ 10) $\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$, limites quand x tend vers $\pm\infty$ et 0^+ et 0^- .

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ sans croissances comparées.
 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x = +\infty$ avec croissances comparées.
 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^7 e^{-3x^2} = -\infty$ sans croissances comparées. et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^7 e^{-3x^2} = 0$ avec croissances comparées.
 4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^9 \sqrt{e^x} = 0$ avec croissances comparées.
 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^2 x^{-5} e^{\sqrt{x}} = +\infty$ avec croissances comparées.
 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{e^x} = 0$ avec croissances comparées. et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{e^x} = 0$ avec croissances comparées.
 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^3 - e^{x^2} = -\infty$ avec croissances comparées.
 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)^2 + x}{e^x - x} = +\infty$ sans croissances comparées.
 9) $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln\left(\frac{x}{1+x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x - x \ln(1+x) = 0$ avec croissances comparées.
 10) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = 0$ sans croissances comparées
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = 0$ avec croissances comparées et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = -\infty$ sans croissances comparées

Exercice 2 : Calculer les limites suivantes :

- 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \ln(\ln x)$ 2) $\lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ 3) $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \ln\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$ 4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{e^{\tan x}}{\cos x}$ 5) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\exp\left(\frac{1}{1-x}\right)}{\sqrt{x^2 - 1}}$

1) On pose $y = \ln x$ et on trouve $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \ln(\ln x) = \lim_{y \rightarrow 0} y \ln y = \boxed{0}$ par croissances comparées

2) On a $\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq \frac{1}{x} \iff 1 - x < x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1$ si $x \geq 0$ ou $1 \geq x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor < 1 - x$ si x négatif. pour généraliser, on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $1 - |x| < x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor < 1 + |x|$.

Par encadrement, on obtient : $\lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$.

3) $(x-1) \ln\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) = \frac{x-1}{2} \ln(1-x) + \ln(1+x) = \frac{x-1}{2} \ln(1+x) - \frac{1-x}{2} \ln(1-x)$. Par croissances comparées, on a $(1-x) \ln(1-x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} 0$ et par ailleurs, on a aussi $\frac{x-1}{2} \ln(1+x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} 0$ donc en conclusion :

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \ln \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \right) = 0$$

4) $\frac{e^{\tan x}}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} e^{\tan x} \frac{1}{\sin x} = \frac{e^{\tan x}}{\tan x} \frac{1}{\sin x}$. On a $\frac{1}{\sin x} \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 1$ et $\tan x \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} +\infty$, donc par composition et par croissances comparées, on a $\frac{e^{\tan x}}{\tan x} \xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} +\infty$.

On en déduit $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\tan x}}{\cos x} = +\infty$

5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\exp\left(\frac{1}{1-x}\right)}{\sqrt{x^2-1}}$ On a $\frac{\exp\left(\frac{1}{1-x}\right)}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\exp\left(\frac{1}{1-x}\right)}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Or, on a $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{2}}$ et comme $\frac{1}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} +\infty$,

on a par composition et par croissances comparées, $\frac{\exp\left(\frac{-1}{x-1}\right)}{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(\frac{-1}{x-1}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} 0$. Donc en

conclusion $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\exp\left(\frac{1}{1-x}\right)}{\sqrt{x^2-1}} = 0$

Exercice 3 : (1 minute) Calculer des équivalents simples des fonctions suivantes :

- 1) $\frac{x^2+x+1}{x^3+2x+3}$ en 0 en -1 et en $+\infty$ 2) $\frac{\ln x+x}{xe^x+x^2}$ en 0 et $+\infty$ 3) $\sqrt{|x|}e^{x^2}+e^x-\sin x$ en $\pm\infty$ et 0.
 4) $\frac{1}{x+1}+\sqrt{x}+1$ en -1 et en $+\infty$. 5) $\frac{1}{1-x^2}$ en -1 et 1 6) x^2+2x+3 en -1 et en -2
 7) $\arctan x$ en $\pm\infty$ 8) $\frac{\ln(1+e^x)}{x+1}$ en 0 et $+\infty$ 9) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$ en 0 et $+\infty$. 10) $\frac{x^\pi+x^e}{\pi^x+e^x}$ en 0 et $+\infty$.

- 1) $\frac{x^2+x+1}{x^3+2x+3} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{3}$ $\frac{x^2+x+1}{x^3+2x+3} \underset{x \rightarrow -1}{\sim} \frac{1}{1+x}$ $\frac{x^2+x+1}{x^3+2x+3} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$
 2) $\frac{\ln x+x}{xe^x+x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{\ln x}{x}$ $\frac{\ln x+x}{xe^x+x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-x}$
 3) $\sqrt{|x|}e^{x^2}+e^x-\sin x \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} \sqrt{-x}e^{x^2}$ $\sqrt{|x|}e^{x^2}+e^x-\sin x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{x}e^{x^2}$ $\sqrt{|x|}e^{x^2}+e^x-\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$
 4) $\frac{1}{x+1}+\sqrt{x+1}+1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{x}$ $\frac{1}{x+1}+\sqrt{x+1}+1 \underset{x \rightarrow -1}{\sim} \frac{1}{x+1}$.
 5) $\frac{1}{1-x^2} \underset{x \rightarrow -1}{\sim} \frac{1}{2(x-1)}$ $\frac{1}{1-x^2} \underset{x \rightarrow -1}{\sim} \frac{1}{2(x+1)}$
 6) $x^2+2x+3 = (x+1)(x+2) \underset{x \rightarrow -1}{\sim} (x+1)$ $x^2+2x+3 \underset{x \rightarrow -2}{\sim} -(x+2)$
 7) $\arctan x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$ $\arctan x \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} -\frac{\pi}{2}$ 8) $\frac{\ln(1+e^x)}{x+1} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln 2$ $\frac{\ln(1+e^x)}{x+1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1$
 9) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^2}$ $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$. 10) $\frac{x^\pi+x^e}{\pi^x+e^x} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^e}{e^x}$ $\frac{x^\pi+x^e}{\pi^x+e^x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^\pi}{\pi^x}$

Continuité

Exercice 4 : Pour chacune des fonctions, dire si elle a une limite à gauche, à droite et enfin si elle est continue en a :

- 1) $x \mapsto \frac{x}{|x|}$ en $a = 0$ 2) $x \mapsto [x]$ en $a = 2$. 3) $x \mapsto x \left| 1 - \frac{1}{x} \right|$ en $a = 0$ 4) $x \mapsto \sqrt{x} \ln |x|$ en $a = 0$
 5) $x \mapsto |x| \ln |x|$ en $a = 0$ 6) $x \mapsto \frac{2x^2-5x+3}{x^2-1}$ en $a = 1$ 7) $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en $a = 0$.

.....

1) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{|x|} = -1$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{|x|} = 1$. Non continue en 0

2) $\lim_{x \rightarrow 2^-} [x] = 1$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} [x] = 2$ Non continue en 2

3) $\lim_{x \rightarrow 0^-} x \left| 1 - \frac{1}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0^-} x \left(1 - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x - 1 = -1$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \left| 1 - \frac{1}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \left(\frac{1}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - x = 1$. Non continue en 0.

4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln|x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x = 0$ par croissance comparée.

Pas de limite à gauche car pas définie à gauche. Continue en 0.

5) $\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| \ln|x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ par croissances comparées. $\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| \ln|x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) \ln(-x) = 0$ comme tout à l'heure. La fonction est prolongeable par continuité en 0

6) $\frac{2x^2 - 5x + 3}{x^2 - 1} = \frac{2(x-1)(x-\frac{3}{2})}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x-3}{x+1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{-1}{2}$. La fonction est prolongeable par continuité en 1.

7) $|\sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq 1 \implies 0 \leq |x \sin\left(\frac{1}{x}\right)| \leq |x|$. Donc par encadrement, on a $|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

Donc $x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. La fonction est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 5 : (en 1 minute) Donner les ensembles de continuité des fonctions suivantes :

1) $x \mapsto \frac{1}{\ln x}$ 2) $x \mapsto \sin(1 + e^x)$ 3) $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ 4) $x \mapsto \frac{e^x + 1}{x^2 - 3}$ 5) $x \mapsto (x + 1)^\pi$

6) $x \mapsto \ln|\cos(x)|$ 7) $x \mapsto [\arctan x]$ 8) $x \mapsto \lfloor \sqrt{x} \rfloor$ 9) $x \mapsto \frac{x^5 + 2x^4 + 1}{x^2 + 4x - 5}$

.....

1) $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ 2) $\mathbb{R}$ 3) $\mathbb{R}^*$ 4) $]-\infty, -\sqrt{3}[\cup]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}, +\infty[$

5) $] -1, +\infty[$ (prolongeable par continuité en -1) 6) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ 7) $\mathbb{R} \setminus \left\{ 0, \frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right\}$

8) $\mathbb{R}_+ \setminus \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$ 9) $\mathbb{R} \setminus \{1, -5\}$.

Exercice 6 : Donner les ensembles de continuité des fonctions suivantes :

1) $x \mapsto \sqrt{1 - \sqrt{x}}$ 2) $x \mapsto \sqrt{2x - x^2 - 2}$ 3) $x \mapsto \ln\left(\frac{1 - x^2}{x^2 + 4x - 5}\right)$ 4) $x \mapsto \sqrt{\ln x}$

5) $x \mapsto \ln(\tan^2 x - 3)$ 6) $x \mapsto \ln \sqrt{1 - e^x}$ 7) $x \mapsto \sqrt{\tan x} + \ln(-\tan x)$ 8) $x \mapsto (\sin x)^{\tan x}$

.....

1) $\sqrt{\cdot}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $x \mapsto \sqrt{1 - \sqrt{x}}$ est continue sur $[0, 1]$ à valeur dans $\mathbb{R}_+$. Donc par composition $x \mapsto \sqrt{1 - \sqrt{x}}$ est définie sur $\boxed{[0, 1]}$

2) On résout $2x - x^2 - 2 \geq 0$: On a $\Delta = 4 - 8 = -4$ donc ce n'est jamais positif.

f n'est donc définie et continue sur aucun ensemble.

3) $x \mapsto \ln\left(\frac{1 - x^2}{x^2 + 4x - 5}\right)$. Déjà on a $x^2 + 4x - 5 = 0 \iff (x + 5)(x - 1) = 0 \iff x = -5$ ou $x = 1$.

Supposons $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -5\}$. On a $\frac{1 - x^2}{x^2 + 4x - 5} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x + 5)} = \frac{x + 1}{x + 5}$ est positive si et seulement si $x \in]-\infty, -5[\cup]-1, +\infty[$.

On a donc : $x \mapsto \frac{1 - x^2}{x^2 + 4x - 5}$ continue sur $] -\infty, -5[\cup]-1, +\infty[$ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ (prolongeable par continuité en 1).

et donc par composition, $x \mapsto \ln\left(\frac{1 - x^2}{x^2 + 4x - 5}\right)$ est continue sur $\boxed{]-\infty, -5[\cup]-1, +\infty[}$.

4) $\ln$ est continue sur $[1, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $\sqrt{\cdot}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$

donc $x \mapsto \sqrt{\ln x}$ est continue sur $\boxed{\mathbb{R}_+}$.

5) Supposons $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, alors $\tan^2 x - 3 > 0 \iff \tan x > \sqrt{3}$ ou $\tan x < -\sqrt{3} \iff x > \arctan \sqrt{3}$ ou $x < \arctan(-\sqrt{3}) \iff x \in]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}[\cup]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$.

Finalement, comme $\tan$ est π périodique, on en déduit que $\tan$ est continue sur I à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ avec

$$I = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{3} + k\pi[\cup]\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$$

et par composition, $x \mapsto \ln(\tan^2 x - 3)$ est continue sur I

6) $1 - e^x \geq 0 \iff 1 \geq e^x \iff 0 \geq x$. Par ailleurs $\sqrt{1 - e^x} = 0 \iff 1 - e^x = 0 \iff e^x = 1 \iff x = 0$
Donc $x \mapsto 1 - e^x$ est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$. et $\sqrt{\cdot}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$. Enfin, $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc $x \mapsto \ln \sqrt{1 - e^x}$ est continue sur $\mathbb{R}_-^*$

7) $\tan x \geq 0$ et $-\tan x > 0$ n'est jamais réalisé, donc $\boxed{\text{la fonction n'est continue ou définie sur aucun ensemble}}$

8) $(\sin x)^{\tan x} = \exp(\tan x \ln(\sin x))$ On veut donc $\sin x > 0$ c'est à dire $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi]$ et $\tan x$ définie, c'est à dire, $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

On a donc : $\sin$ continue sur $I = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi] \setminus \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\}$, à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Enfin, $\tan$ est continue sur I . Donc finalement par produit, puis composition par $\exp$ qui est continue sur $\mathbb{R}$,

on obtient : $x \mapsto (\sin x)^{\tan x}$ est continue sur $I = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi[\cup]\frac{\pi}{2} + 2k\pi, (2k+1)\pi]$

Exercice 7 : Donner l'ensemble de continuité des fonctions suivantes (et justifier) :

$$1) f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq -1 \\ \ln(-1-x) & \text{sinon} \end{cases} \quad 2) g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{x}{\sqrt{-x}} & \text{sinon} \end{cases} \quad 3) h(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & \text{si } x \in]-1, 1[\\ \frac{1}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$4) f \circ g \quad 5) g \circ f \quad 6) g \circ h \quad 7) h \circ f$$

1) f est continue sur $] -1, +\infty[$: en effet, $x \mapsto x+1$ est continue sur $] -1, +\infty[$ à valeur dans $\mathbb{R}_+$ et $\sqrt{\cdot}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Par ailleurs f est continue sur $] -\infty, -1[$: en effet, $x \mapsto -(x+1)$ est continue sur $] -\infty, -1[$ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Reste à vérifier la continuité en -1 . On a $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \ln(-1-x) = -\infty$. Donc f n'est pas continue

à gauche en -1 donc $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \setminus \{-1\}}$.

2) g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ car $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Par ailleurs, g est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ car $x \mapsto -x$ est continue sur $\mathbb{R}_-$ à valeur dans $\mathbb{R}_+$ et $\sqrt{\cdot}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

g est donc continue sur $\mathbb{R}^*$. On vérifie la continuité en 0 : On a $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{-x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) =$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. g n'est donc pas continue en 0 . Finalement $\boxed{g \text{ est continue sur } \mathbb{R}^*}$

3) h est continue sur $] -1, 1[$ car $x \mapsto 1+x^2$ est continue sur $] -1, 1[$ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par ailleurs, h est continue sur $] -\infty, -1[$ et sur $] 1, +\infty[$ car $x \mapsto \frac{1}{2}$ est constante donc continue sur ces intervalles.

h est donc continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. On vérifie la continuité en -1 : On a $\lim_{x \rightarrow -1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}$. h est donc continue en -1 . De même, par parité elle est continue en 1 .
Finalement $\boxed{h \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$

4) g est continue sur $\mathbb{R}^*$ à valeur dans $\mathbb{R}^+$ et f est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc $\boxed{f \circ g \text{ est continue sur } \mathbb{R}^*}$.

5) $f(x) = 0 \iff \sqrt{x+1} = 0$ ou $\ln(-1-x) = 0 \iff x = -1$ ou $x = -2$.

f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$ à valeur dans $\mathbb{R}^*$ et g est continue sur $\mathbb{R}^*$ donc $\boxed{g \circ f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}}$.

6) h est continue sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ et g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\boxed{g \circ h \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

7) f est continue sur $\mathbb{R}^*$ à valeur dans $\mathbb{R}$ et h est continue sur $\mathbb{R}$ donc $\boxed{h \circ f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^*}$.

Exercice 8 : Donner l'ensemble de définition et de continuité de ces fonctions et calculer leur prolongement

par continuité : 1) $x \mapsto x \ln x$ 2) $x \mapsto x^{\ln x}$ 3) $x \mapsto e^{-\frac{1}{|x|}}$ 4) $x \mapsto \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$
.....

1) $f : x \mapsto x \ln x$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a par ailleurs en 0 : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ par croissances comparées, on peut donc prolonger par continuité en

0 en posant $\boxed{f(0) = 0 \text{ et } f \text{ continue sur } \mathbb{R}_+}$

2) $f(x) = x^{\ln x} = e^{-(\ln x)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet, $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeur dans $\mathbb{R}$ et $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs en 0, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} -(\ln x)^2 = -\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$. On peut donc prolonger par continuité en

0 en posant $\boxed{f(0) = 0 \text{ et } f \text{ continue sur } \mathbb{R}_+}$

3) $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}$. $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ à valeur dans $\mathbb{R}^*$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, donc f est continue sur $\mathbb{R}^*$. On remarque que f est paire.

Par ailleurs en 0, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$ et par parité on a aussi $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$. On peut donc

prolonger par continuité en 0 en posant $\boxed{f(0) = 0 \text{ et } f \text{ continue sur } \mathbb{R}}$

4) $f(x) = \frac{\sqrt{|x-1|}}{x^2-1}$ est définie et continue sur $] -1, 1[$: en effet, $x \mapsto x^2 - 1$ est continue sur $] -1, 1[$ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\sqrt{\cdot}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeur dans $\mathbb{R}_+^*$, enfin $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par ailleurs, on a $f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$. f est donc prolongeable par continuité en 1 en

posant $\boxed{f(1) = 0 \text{ et } f \text{ continue sur } \mathbb{R} \setminus \{-1\}}$

Exercice 9 : (continuité et partie entière)

1) Montrer que la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{[x]}{2}(2x - [x] - 1)$ est continue sur $\mathbb{R}$

2) Étudier la continuité de la fonction $f : x \mapsto [x] + \sqrt{x - [x]}$.

.....
1) Déjà, on sait que $[\cdot]$ est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Donc par produit, f est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$, étudions la continuité de f en n :

Limite à droite : On a $\lim_{x \rightarrow n^+} [x] = n$, donc $\lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = \frac{n}{2}(2n - n - 1) = \frac{n(n-1)}{2}$.

Limite à gauche : On a $\lim_{x \rightarrow n^-} [x] = n-1$, donc $\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = \frac{n-1}{2}(2n - (n-1) - 1) = \frac{(n-1)n}{2}$.

On trouve bien que f est continue en n . Cela est vrai pour tout $n \in \mathbb{Z}$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) D'abord on remarque que $x \mapsto x - [x]$ est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ à valeur dans $\mathbb{R}_+$ (en effet on a $\forall x \in \mathbb{R}, [x] \leq x$). $\sqrt{\cdot}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que f est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Si $n \in \mathbb{Z}$, étudions la continuité de f en n :

Limite à droite : On a $\lim_{x \rightarrow n^+} [x] = n$, donc $\lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = n + \sqrt{n - n} = n$.

Limite à gauche : On a $\lim_{x \rightarrow n^-} [x] = n - 1$, donc $\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = n - 1 + \sqrt{n - (n - 1)} = n - 1 + \sqrt{1} = n$.

On trouve que f est continue en n . Cela est vrai pour tout $n \in \mathbb{Z}$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 : Montrer que toute fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.

.....

On note T la période de f . Comme f est continue sur $[0, T]$, on a f qui est bornée et atteint ses bornes sur ce segment. On pose $\alpha = \min_{[0, T]} f$ et $\beta = \max_{[0, T]} f$. On a alors $\forall x \in \mathbb{R}, \alpha \leq f(x) \leq \beta$ car f est périodique. Donc f est majoré sur $\mathbb{R}$ par β et minoré par α .

On a donc $\alpha = \min_{\mathbb{R}} f$ et $\beta = \max_{\mathbb{R}} f$ sont les bornes (atteintes) de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 : Soit $f \in C^0([0, 1])$ telle que $f([0, 1]) \subset [0, 1]$, montrer que f admet un point fixe, c'est à dire qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

.....

On pose $g(x) = f(x) - x$. On a alors $g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ car $f(1) \in [0, 1]$. Par ailleurs, g est la somme de deux fonctions continues, elle est donc continue sur $[0, 1]$.

On en déduit, par le théorème des valeurs intermédiaires : il existe $x_0 \in [0, 1] \mid g(x_0) = 0$.

On a donc $g(x_0) = f(x_0) - x_0 = 0$ c'est à dire $f(x_0) = x_0$.

Exercice 12 : On dit que f est lipschitzienne sur I si et seulement si il existe $k > 0$ tel que :
 $\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$

Montrer que si f est lipschitzienne sur I alors f est continue sur I .

.....

Soit $a \in I$, montrons que f est continue en a . D'après la définition, cela revient à montrer que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Or on a $\forall x \in I, 0 \leq |f(a) - f(x)| \leq k|a - x|$. Or, $|a - x| \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.

Par encadrement on a donc $\lim_{x \rightarrow a} |f(a) - f(x)| = 0$. Cela revient exactement à dire que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Exercice 13 : Trouver l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ qui vérifient les égalités suivantes :

1) $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x) + f(y)$ **2)** $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x)f(y)$

Indication : On pourra utiliser le résultat que tout nombre irrationnel est limite d'une suite de nombre rationnels.

.....

1) On a déjà $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$ donc $f(0) = 0$.

Par ailleurs, on pose $f(1) = a$. On va montrer pour tout nombre $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = ax$.

Déjà, on remarque que $\forall x \in \mathbb{R}, f(nx) = nf(x)$. En effet, cela se montre par récurrence. Pour $n = 0$ on a $f(0 \cdot x) = f(0) = 0 = 0 \cdot f(x)$. Si c'est vrai au rang n , on a $f((n + 1)x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n + 1)f(x)$ par hypothèse de récurrence.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = nf(1) = na$. Par ailleurs si $k \in \mathbb{Z}$, alors on a $f(k) = ka$ si k est positif, d'après le raisonnement précédent et si < 0 , alors $f(k - k) = f(k) + f(-k) = f(0) = 0$, donc $f(k) = -f(-k) = -(-ka) = ka$ car $-k \in \mathbb{N}$.

On a ensuite $f\left(\frac{n}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right) = f(1) = a$ donc $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{a}{n}$.

Si on pose $r \in \mathbb{Q}$, on a $r = \frac{p}{q}$ et $f(r) = pf(\frac{1}{q}) = \frac{p}{q}a = ra$. La propriété est donc vraie pour tout nombre rationnel.

Enfin, si $x \in \mathbb{R}$, alors il existe $(r_n)_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que $r_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$. On a donc $f(r_n) = r_n a \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} xa$ mais par continuité de f , on a aussi $f(r_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$. On a donc, par unicité de la limite : $f(x) = ax$.

Ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc finalement on a $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax \text{ avec } a \in \mathbb{R}}$

2) Exactement le même raisonnement mais cette fois on montre que $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a^x \text{ avec } a \in \mathbb{R}_+^* \text{ ou } f = 0}$

On a $a = f(1) \in \mathbb{R}_+^*$ car $f(1) = f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$.

et si $f(1) = a = 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(1 + (x - 1)) = f(1)f(x - 1) = 0$ donc $f = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 : On pose $f(x) = xe^x$

1) Donner l'ensemble de définition, de continuité et de dérivabilité de f et dresser son tableau de variation.

2) En déduire que f est bijective sur $I = [-1, +\infty[$ et calculer $f(I)$.

3) Quels sont les ensembles de départ et d'arrivée de f^{-1} ? Justifier que f^{-1} est continue.

Quel est le sens de variation de f^{-1} ?

4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(u_n) = n$.

5) Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)_n$? Admet-elle une limite quand $n \rightarrow +\infty$?

6) Montrer que $u_n \sim \ln n$. 7) Calculer $f^{-1}(0)$ et trouver un équivalent simple en 0 de $f^{-1}(x)$.

1) f est définie, continue et dérivable sur $\boxed{\mathbb{R}}$ comme produit de deux fonctions définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

2) On a $f'(x) = (x + 1)e^x$ donc $f'(x) \geq 0 \iff x + 1 \geq 0 \iff x \geq -1$.

f est donc strictement croissante sur $I = [-1, +\infty[$. $\boxed{f \text{ est donc bijective sur } I}$ à valeur dans $f(I)$. Par le théorème de la bijection continue, on a $f(I) = [f(-1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$ donc $\boxed{f(I) = [-e^{-1}, +\infty[}$.

3) On a $\boxed{f^{-1}[-e^{-1}, +\infty[\rightarrow [-1, +\infty[}$. Le théorème de la bijection continue dit que f^{-1} est continue sur $f(I)$ et a le même sens de variation que f donc $\boxed{f^{-1} \text{ est continue et strictement croissante sur } [-e^{-1}, +\infty[}$.

4) Comme on a $n \in [-e^{-1}, +\infty[$. On peut poser $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f^{-1}(n)$.

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) = f \circ f^{-1}(n) = \boxed{n}$.

Par ailleurs, comme on a $f(0) = 0$, on a $f^{-1}(0) = 0$, et comme f^{-1} est croissante,

on a $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0 \implies f^{-1}(n) \geq f^{-1}(0) = 0 \implies u_n \geq 0$. Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{R}_+}$.

5) $\boxed{u_n \text{ est strictement croissante}}$, en effet, f^{-1} est strictement croissante sur $[-e^{-1}, +\infty[$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}, n + 1 > n \implies f^{-1}(n + 1) > f^{-1}(n) \implies u_{n+1} > u_n$

Par ailleurs, on a $f^{-1}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ car elle est strictement croissante et non majorée. Donc $\boxed{u_n = f^{-1}(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty}$.

6) On a montré que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Or $f(u_n) = u_n e^{u_n} = n$ donc $\ln u_n + u_n = \ln n$.

On en déduit $\frac{\ln u_n}{u_n} + 1 = \frac{\ln n}{u_n}$ et par croissances comparées $\frac{\ln u_n}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $\frac{\ln n}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. On en déduit

$\boxed{u_n \sim \ln n}$.

7) On a $f(0) = 0$ donc $f^{-1}(0) = 0$. On ne peut pas dire que $f^{-1}(x)$ est équivalent à 0, donc il faut utiliser $f \circ f^{-1}(x) = x \iff f^{-1}(x)e^{f^{-1}(x)} = x$. Or $e^{f^{-1}(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} e^0 = 1$ donc par produit $f^{-1}(x)e^{f^{-1}(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} f^{-1}(x)$

or $f^{-1}(x)e^{f^{-1}(x)} = x$, on en déduit : $f^{-1}(x)e^{f^{-1}(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ finalement $\boxed{f^{-1}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x}$

Exercice 15 : On pose $f_n(x) = \sum_{k=1}^n kx^k$.

- 1) Pour tout $n \geq 1$, montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ que l'on notera u_n .
- 2) En comparant $f_{n+1}(u_n)$ et $f_{n+1}(u_{n+1})$, montrer que la suite $(u_n)_n$ est monotone.
- 3) En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge.

1) On a f_n définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de fonctions définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

On a $f'_n(x) = \sum_{k=1}^n k^2 x^{k-1} > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. On a par ailleurs,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$, donc $f_n(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$. f_n est donc une bijection continue de $\mathbb{R}_+$ vers $\mathbb{R}_+$.

On peut donc poser $u_n = f_n^{-1}(1)$.

2) $f_{n+1}(x) = f_n(x) + (n+1)x^{n+1}$ donc $f_{n+1}(u_n) = f_n(u_n) + (n+1)(u_n)^{n+1}$,
donc $f_{n+1}(u_n) = 1 + (n+1)(u_n)^{n+1} \geq 1 = f_{n+1}(u_{n+1})$.

On en déduit $f_{n+1}(u_n) \geq f_{n+1}(u_{n+1})$ et donc par croissance de f_{n+1} , cela donne $u_n \geq u_{n+1}$.

Ceci est vrai pour tout $n \geq 1$, donc la suite $(u_n)_n$ est décroissante.

3) La suite $(u_n)_n$ est décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 16 : (*croissance et continuité*) Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, continue en a .

- 1) Montrer que si f est croissante sur $]a, b]$ alors f est croissante sur $[a, b]$.
- 2) Montrer que f est strictement croissante sur $]a, b]$ alors f est strictement croissante sur $[a, b]$.

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, continue en a .

1) On a déjà $\forall x, y \in]a, b], x > y \implies f(x) \geq f(y)$. On veut montrer : $\forall x, y \in [a, b], x > y \implies f(x) \geq f(y)$.
Il reste donc à montrer que pour $x = a$, $\forall y \in]a, b], y > a \implies f(y) \geq f(a)$.

Soit $y \in]a, b]$, on veut montrer $f(y) \geq f(a)$. Or f étant continue, on a $f\left(a + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(a)$.

Comme $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a pour n suffisamment grand (disons pour $n \geq N$) $0 < \frac{1}{n} < y - a$

c'est à dire $a < a + \frac{1}{n} < y$. On pose $y_n = a + \frac{1}{n}$. On a donc $y_n \in]a, b]$ et $y > y_n > a$, donc $f(y) \geq f(y_n)$ pour tout $n \geq N$.

Par passage à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient donc $f(y) \geq f(a)$. D'où le résultat.

2) On a déjà $\forall x, y \in]a, b], x > y \implies f(x) > f(y)$. On veut montrer : $\forall x, y \in [a, b], x > y \implies f(x) > f(y)$.
Il reste donc à montrer que pour $x = a$, $\forall y \in]a, b], y > a \implies f(y) > f(a)$.

Soit $y \in]a, b]$, on veut montrer $f(y) > f(a)$ f étant croissante, le raisonnement précédent nous donne $f(y) \geq f(a)$, ce qui est insuffisant car nous voulons une inégalité stricte.

Supposons par l'absurde que $f(y) = f(a)$. Si on prend $y_1 = \frac{y+a}{2}$, on a alors $y_1 \in]a, y[\subset]a, b]$.

Donc $f(y) > f(y_1)$ car f est strictement croissante sur $]a, b]$. Mais d'après le raisonnement de la question précédente, comme f est croissante, on a $y_1 > a \implies f(y_1) \geq f(a) = f(y)$. Donc $f(y_1) \geq f(y)$. C'est contradictoire avec $f(y) > f(y_1)$.

Il est donc impossible d'avoir $f(y) = f(a)$. La seule option est donc $f(y) > f(a)$.

Exercice 17 : (*Avec la définition de la continuité*) Etudier la continuité de la fonction $f : x \mapsto \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}$.

Déjà montrons que f est bien définie.

La suite $\left(\frac{x^n}{n!}\right)_n$ est une suite qui converge vers 0 par croissance comparée (exponentielle < factorielle) donc elle est bornée. On peut donc définir sa borne supérieure.

Etudions la suite de terme $u_n = \frac{x^n}{n!}$ pour trouver son maximum.

On a $u_n \geq 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1} \geq 1 \iff x \geq n+1 \iff x-1 \geq n \iff [x]-1 \geq n$.

On a donc $u_{n+1} \geq u_n$ si et seulement si $n \in \llbracket 0, [x]-1 \rrbracket$. Autrement dit, $u_{[x]} \geq u_{[x]-1} \geq \dots \geq u_1 \geq u_0$. Mais après $u_{[x]}$, la suite devient décroissante, donc $u_{[x]}$ est le terme maximal de la suite,

Autrement dit on a $u_{[x]} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!} = \frac{x^{[x]}}{[x]!}$. On a donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^{[x]}}{[x]!}$.

Donc, si $k \in \mathbb{Z}$, on a $\forall x \in]k, k+1[, f(x) = \frac{x^k}{k!}$ est continue (c'est une fonction polynômiale).

Donc f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Etudions la continuité en $k \in \mathbb{Z}$:

Limite à gauche : $\forall x \in]k-1, k[$, on a $f(x) = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$ donc $\lim_{x \rightarrow k^-} f(x) = \frac{k^{k-1}}{(k-1)!}$

Limite à droite : $\forall x \in]k, k+1[$, on a $f(x) = \frac{x^k}{(k)!}$ donc $\lim_{x \rightarrow k^+} f(x) = \frac{k^k}{(k)!} = \frac{k \cdot k^{k-1}}{k \cdot (k-1)!} = \frac{k^{k-1}}{(k-1)!}$

Comme la limite est la même, on en déduit que f est continue en $k \in \mathbb{Z}$. Ceci étant vrai pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on trouve que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18 : (Avec la définition de la continuité) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

On pose la fonction $\varphi : x \mapsto \begin{cases} \max_{[0,x]} f & \text{si } x > 0 \\ \max_{[x,0]} f & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

- 1) Justifier que φ est définie sur $\mathbb{R}$.
- 2) Déterminer φ dans le cas où $f = \exp$ et $f = \sin$
- 3) Montrer que φ est continue.
- 4) Montrer qu'on peut avoir φ définie sur $\mathbb{R}$ et continue sans avoir f continue.

.....

1) Si $x \geq 0$, comme f est continue sur $[0, x]$, elle admet bien un maximum sur $[0, x]$ donc $\varphi(x)$ est bien défini. Pareil si $x \leq 0$. Ainsi φ est définie sur $\mathbb{R}$

2) Si $f = \exp$ alors $\varphi(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$. Si $f = \sin$ alors $\varphi(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{-3\pi}{2}, -\pi\right] \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } x \in \left[-\pi, 0\right] \\ -1 & \text{si } x \leq \frac{-3\pi}{2} \end{cases}$

3) Soit $\varepsilon > 0$ alors comme f est continue, $\exists \delta > 0 \mid \forall x, y \in \mathbb{R}, |x-y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x-y| \leq \delta$. On montre que $|\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$ à l'aide d'une disjonction de cas.

1er cas : si $x, y \in \mathbb{R}_+$. On a $\varphi(x) = \max_{[0,x]} f$ et $\varphi(y) = \max_{[0,y]} f$. Supposons $y > x$ le raisonnement serait identique pour $x > y$. Ainsi, $[0, x] \subset [0, y]$ et $\varphi(x) \leq \varphi(y)$.

On a $\exists x_0 \in [0, x] \mid f(x_0) = \max_{[0,x]} f = \varphi(x)$ et $\exists y_0 \in [0, y] \mid f(y_0) = \max_{[0,y]} f = \varphi(y)$.

On a $\varphi(x) \leq \varphi(y) \implies f(x_0) \leq f(y_0)$ (*)

- Si $y_0 \in [0, x]$: alors $f(y_0) \leq \max_{[0,x]} f = \varphi(x)$ et donc d'après (*), on a $f(y_0) = f(x_0) \implies \varphi(x) = \varphi(y)$ ainsi

$|\varphi(x) - \varphi(y)| = 0 < \varepsilon$. C'est vérifié!

- Si $y_0 \in]x, y]$: on a alors $y_0 \leq y \implies y_0 - x \leq y - x \implies |y_0 - x| \leq |y - x| \leq \delta \implies |f(y_0) - f(x)| < \varepsilon \implies f(y_0) - f(x) < \varepsilon$ car $f(y_0) \geq f(x)$

Ainsi $|\varphi(y) - \varphi(x)| = |f(y_0) - f(x_0)| = f(y_0) - f(x_0) = f(y_0) - f(x) + f(x) - f(x_0) \leq f(y_0) - f(x) \leq \varepsilon$ car $f(x) - f(x_0) \leq 0$
Conclusion on a bien dans ce cas $|\varphi(y) - \varphi(x)| < \varepsilon$.

2eme cas : si $x, y \in \mathbb{R}_-$: C'est exactement pareil que le précédent donc je ne le fais pas.

3eme cas : si $x \in \mathbb{R}_-$ et $y \in \mathbb{R}_+$: Alors $\exists x_0 \in [x, 0] \mid f(x_0) = \max_{[x, 0]} f = \varphi(x)$
et $\exists y_0 \in [0, y] \mid f(y_0) = \max_{[0, y]} f = \varphi(y)$.

On a donc $|y_0 - x_0| = y_0 - x_0 \leq y - x \leq \delta$ car $y_0 \leq y$ et $x_0 \geq x$ ainsi $|f(y_0) - f(x_0)| < \varepsilon \implies |\varphi(y) - \varphi(x)| < \varepsilon$

4eme cas : si $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}_-$: C'est exactement pareil que le précédent donc je ne le fais pas.

Dans tous les cas on a montré que $|\varphi(y) - \varphi(x)| < \varepsilon$ donc $\boxed{\varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

4) Si $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Alors on peut vérifier facilement que le maximum de f sur les segments de types $[0, x]$ et $[x, 0]$ sera toujours $f(0) = 1$ Donc on aura $\boxed{\varphi(x) = 1}$ sur $\mathbb{R}$. qui est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ alors que f n'est pas continue en 0.
