

TD 16 - Dérivation

1BCPST 2

Feuille d'exercice

Année 2025- 2026

Dérivabilité en un point

Exercice 1 : (En 1 minute ♡) Calculer les limites suivantes

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x}$ 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+1} - e}{x}$ 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$ 4) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x + 1}{x - \pi}$ 5) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{4x - \pi}$
6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{\ln(1+x)}$ 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$ 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}$ 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{1 - \cos x}$ 10) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x^2}$
11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{\arctan(5x)}$ 12) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arctan(x^2 - 1)}{\arctan(x - 1)}$

Exercice 2 : (En 1 minute ♡) Donner des équivalents simples des termes suivants :

- 1) $\frac{\sin x}{x^2 + x}$ en 0 2) $\frac{\arctan x}{\sin^2 x}$ en 0 3) $\frac{\ln(e^x + 1)}{(x + \sqrt{|x|})^2}$ en $+\infty$ et en $-\infty$ 4) $\frac{\ln(x)}{1+x}$ en 1
5) $\arctan x + x^2$ en 0. 6) $e^x - 1 + \sqrt{x}$ en 0. 7) $x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + 1$ en $+\infty$.

Exercice 3 : ♡ - ★ Dire si les fonctions suivantes sont dérivables (à gauche, à droite) au point 0 :

- 1) $f(x) = \lfloor x \rfloor$ 2) $f(x) = x \lfloor x \rfloor$ 3) $f(x) = x|x|$ 4) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ si $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(0) = 0$
5) $f(x) = \frac{x}{|x| + 1}$ 6) $f(x) = 2^{x^2} + 1$. 7) $f(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$

Exercice 4 : ★ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } |x| > 1 \\ \frac{x}{ax^3 + bx + c} & \text{si } x \in [-1, 1] \end{cases}$ Trouver $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que f dérivable sur $\mathbb{R}$.

Dérivabilité sur un ensemble

Exercice 5 : ★ Donner les ensembles de continuité et de dérivabilité des fonctions suivantes :

- 1) $f(x) = |e^x - 1|$ 2) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$ 3) $f(x) = \frac{1}{x + |x|}$ 4) $f(x) = \ln(1 + |x + 1|)$.
5) $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ 6) $f(x) = x^{\sin x}$ 7) $f(x) = |1 + \sin x|$. 8) $f(x) = (\arctan x)^{\frac{-1}{4}}$.

Exercice 6 : ★ Donner les ensembles de continuité et de dérivabilité des fonctions suivantes :

- 1) $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x > 0 \\ x & \text{sinon} \end{cases}$ 2) $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & \text{si } |x| < 1 \\ \frac{-x}{2} & \text{sinon} \end{cases}$ 3) $h(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x > 0 \\ x\sqrt{x} & \text{sinon} \end{cases}$
4) f^{-1} 5) h^{-1} 6) $f \circ g$ 7) $g \circ f$ 8) $h^{-1} \circ g$ 9) $g \circ h^{-1}$.

Exercice 7 : ★ Soit I un intervalle tel que $\forall x \in I, -x \in I$. et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction paire ou impaire dérivable sur I . Donner la parité de f' en fonction de celle de f .

Exercice 8 : ★★ Montrer que $f(x) = \frac{\lfloor x \rfloor}{2}(2x - \lfloor x \rfloor - 1)$ est dérivable à gauche et à droite en tout point de $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée. Représenter graphiquement f' .

Théorèmes de Rolle et Accroissements finis

Exercice 9 : ★★ 1) Montrer que la dérivée de tout polynôme scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples est aussi un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples.

2) Montrer que la dérivée de tout polynôme scindé sur $\mathbb{R}$ est aussi un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$

Exercice 10 : ★ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et périodique. Montrer que f' s'annule.

Exercice 11 : ★ - ★★ Utiliser le théorème des accroissements finis pour démontrer les inégalités suivantes :

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}, |\arctan x| \leq |x|$. 2) $\forall x \in \mathbb{R}, |\cos x - 1| \leq |x|$. 3) $\forall x > 0, \frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x}$
 4) $\forall x > 0, \arctan(x) > \frac{x}{1+x^2}$.

Exercice 12 : ★★ Si $a > 0$, encadrer puis trouver un équivalent de la suite $u_n = \sqrt{n+a} - \sqrt{n}$.
 De même trouver un équivalent de $v_n = \arctan(n+1) - \arctan(n)$ et $w_n = (n+2)^\pi - n^\pi$

Exercice 13 : ★ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left((x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} \right)$.

Exercice 14 : ★ Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$\frac{f(a)}{f(b)} = \exp\left(\frac{f'(c)}{f(c)}(b-a)\right)$$

(On pourra utiliser la fonction $g = \ln f$)

Exercice 15 : ★★ On pose $u(x) = \arctan(x) - x$ et $v(x) = x^2$.

- 1) Montrer qu'il existe un nombre $c \in]0, x[$ tel que $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u'(c)}{v'(c)}$. 2) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x) - x}{x^2}$.

Dérivées d'ordre n

Exercice 16 : ★ - ★★ Montrer que ces fonctions sont de classe C^∞ sur leur ensemble de définition et calculer leur dérivée n^{ieme} où $n \in \mathbb{N}$.

- 1) $f(x) = e^{2x}$ 2) $f(x) = x^5$ 3) $f(x) = xe^x$. 4) $f(x) = (x^2 + 1)e^{2x}$

Exercice 17 : ★★ - ★★★ On pose $f(x) = \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)$.

1) Quel est le domaine de continuité de f ? Montrer que f est prolongeable par continuité.

2) Montrer que la fonction ainsi prolongée est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que $f \in C^1(\mathbb{R})$.

4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^n(\mathbb{R})$ et $\exists P_n \in \mathbb{R}[X] \mid \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)$ et $f^{(n)}(0) = 0$.

5) En déduire que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Exercice 18 : ★★ Montrer que si $f \in C^n(I)$ s'annule en $n+1$ points distincts de I , alors $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois.

Exercice 19 : (Convexité ★★★) Soit f une fonction deux fois dérivable sur I . On dit que f est convexe si et seulement si :

$$\forall x, y \in I, \forall t \in [0, 1], f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$$

Montrer que f'' est positive sur I si et seulement si f est convexe sur I .

Indication : Pour le sens indirect on étudiera les variations de la fonction : $g : x \mapsto \frac{f(a) - f(x)}{a - x}$ pour ensuite prouver que f' est croissante (faire des dessins peut aider).

Exercice 20 : ★★★ Soit f une fonction deux fois dérivable en $a \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que $f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{(x-a)^2}{2} f''(a)$.

2) En déduire un équivalent de $\cos(x) - 1$ quand $x \rightarrow 0$ 3) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$.