

TD 17-18 - Intégration / DL

1BCPST 2

Feuille d'exercice

Année 2025- 2026

Intégration

Exercice 1 : (*Sommes de Riemann* ★) Calculer les limites des suites ci dessous quand $n \rightarrow +\infty$:

$$1) u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} \quad 2) u_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2} \quad 3) u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{k^2} \quad 4) \sum_{k=0}^n \frac{\exp(2k + n)^{\frac{2}{n}}}{n}$$

Exercice 2 : ★★ Calculer les limites des suites ci dessous quand $n \rightarrow +\infty$:

$$1) u_n = \ln n - \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} \ln k \quad 2) u_n = \sum_{k=0}^{3n} \frac{n^2}{(k + 3n + 1)^3} \quad 3) u_n = \frac{1}{n} \left(\frac{(2n)!}{n!} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 3 : ★ - ★★ Trouver un équivalent quand $n \rightarrow +\infty$ des suites suivantes :

$$1) u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n + 2k)^3} \quad 2) u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^2}{n^2} \right)^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 4 : ★★

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$, telle que $\int_0^1 f = \frac{1}{2}$. Montrer que $\exists c \in [0, 1] \mid f(c) = c$.

Exercice 5 : ★ - ★★ Donner l'ensemble de dérivabilité de ces fonctions et calculer leur dérivées :

$$1) x \mapsto \int_x^{2x} \exp(-t^2) dt \quad 2) x \mapsto \int_x^{x+1} \frac{\sin t}{t} dt \quad 3) x \mapsto \int_{-x}^{2x} \frac{1}{t^3 + 1} dt \quad 4) x \mapsto \int_1^2 x \ln(tx) dt$$

Exercice 6 : ★ - ★★ Soit $f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \arctan(t^2) dt$

- 1) Donner le domaine de continuité de f et montrer qu'on peut la prolonger par continuité en 0.
- 2) Montrer que la fonction ainsi prolongée est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
- 3) Etudier les variations et la parité de f .
- 4) Montrer que f est bornée, quel est le comportement de f en $+\infty$ et $-\infty$?

Exercice 7 : ★ Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, telle que pour toute fonction g continue sur $[a, b]$, on a $\int_a^b fg = 0$. Montrer que $f = 0$.

Exercice 8 : ★★ - ★★★

Soit f une fonction continue positive sur $[a, b]$. On pose $M = \sup_{[a, b]} f$ et $I_n = \left(\int_a^b f^n \right)^{\frac{1}{n}}$

- 1) Justifier l'existence de M et montrer que $M \geq 0$
- 2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \leq M(b - a)^{\frac{1}{n}}$
- 3) Soit $\varepsilon > 0$, a) Montrer qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N_1, I_n < M + \varepsilon$
. 3.b) Montrer qu'il existe un intervalle (non réduit à un point) $J = [c, d] \subset I$ tel que $\forall t \in J, f(t) \geq M - \frac{\varepsilon}{2}$
- 4) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Développements limités

Exercice 1 : ♡ - ★ Calculer le DL à l'ordre 4 en 0 des fonctions suivantes : 1) $x \mapsto \cos x - e^x$
 2) $x \mapsto (1+x^2) \exp x$ 3) $x \mapsto \sqrt{x^5 + x^4}$ 4) $x \mapsto xe^x - x^2 \cos x$ 5) $x \mapsto \sin(3x)$
 6) $x \mapsto (\ln(1+x))^2$ 7) $x \mapsto \tan x$ 8) $x \mapsto \ln(\cos x)$ 9) $x \mapsto \ln(2+x)$ 10) $x \mapsto \cos(3x+1)$
 11) $x \mapsto \cos^\pi(x)$

Exercice 2 : Calculer les limites suivantes : 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$ 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1 - x}$
 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - x$ 4) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\tan x} - \frac{1}{x}$ 5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \left(x^3 + \frac{x^2}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

Exercice 3 : ♡ - ★ 1) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto (x+1)^x$ admet un DL à l'ordre n en 0.

2) Calculer son DL à l'ordre 3 en 0. 3) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^x - 1 - x^2}{x^3}$.

Exercice 4 : ★★ Soit f est de classe C^n sur I avec $0 \in I$ avec $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$

1) Montrer que la fonction $x \mapsto \int_0^x f$ admet un DL à l'ordre $n+1$ en 0 et le calculer en fonction de celui de f .

2) En déduire le DL de arctan en 0 à l'ordre n .

3) Calculer le DL à l'ordre 10 en 0 de $x \mapsto \int_0^x \frac{1}{1+t^4} dt$

Exercice 5 : ★ Calculer le DL à l'ordre n de $f : x \mapsto \frac{x^4}{1-x^2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire la valeur de $f^{(n)}(0)$.

Exercice 6 : ★★ 1) Soit P un polynôme de degré n , démontrer que $P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré n tel que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$.

3) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $Q \in \mathbb{R}[X]$ pour avoir $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $Q^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$.

Exercice 7 : ★ Montrer que $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ peut être prolongée en une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 : ★ - ★★★ On pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$.

1) Montrer que f est bijective sur $[-1, +\infty[$. On note f^{-1} sa réciproque.

2) Montrer que f^{-1} est de classe C^∞ sur un ensemble qu'on déterminera.

3) Calculer le DL à l'ordre 4 de f^{-1} en 0.

Exercice 9 : ★★ Montrer que $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ est prolongeable en une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et calculer son DL à l'ordre 2 en 0.

Exercice 10 : ★★ Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On pose $f(x) = \frac{\ln(1+ax)}{1+x}$. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles f présente un point d'inflexion en 0.

Remarque : Un point d'inflexion est un point au voisinage duquel la courbe de f traverse sa tangente (la courbe de f n'est pas entièrement au dessus, ni entièrement en dessous)

Exercice 11 : ★ On pose $f(x) = xe^{-x}$. Montrer que la courbe de f présente un point d'inflexion dont on précisera les coordonnées. Tracer la courbe de f .

Remarque : Même remarque que pour l'ex 10