Correction de l'exercice 1.

Correction de l'exercice 2.

Correction de l'exercice 3.

Correction de l'exercice 4.

Correction de l'exercice 5.

1. Supposons que $\sum u_n$ converge avec $(u_n)_n$ une suite positive. Comme $\sum u_n$ converge, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Ainsi, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. En multipliant par u_n, on obtient $0 \leqslant {u_n}^2 \leqslant u_n$, or $\sum u_n$ converge, par comparaison de deux SATP, $\sum {u_n}^2$ converge.
2. Si $u_n = 1/n$, alors $\sum\limits_{n\geqslant 1} {u_n}^2$ converge mais $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ diverge.
3. Si $\sum u_n$ converge absolument, alors $\sum |u_n|$ converge. Comme $\sum |u_n|$ est une SATP, on peut lui appliquer la question 1, $\sum |u_n|^2$ converge. Or, pour tout entier n, ${u_n}^2 = |u_n|^2$. Ainsi, $\sum {u_n}^2$ converge.

Correction de l'exercice 6.

Correction de l'exercice 7.

1. En effectuant le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= H_{n+1} - \ln(n+1) - (H_n - \ln(n)) = H_{n+1} - H_n - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= H_{n+1} - H_n - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{2n^2 - 2n(n+1) + (n+1)}{2(n+1)n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{-2n+1}{2(n+1)n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Or, $\dfrac{-n+1}{2(n+1)n^2} \sim \dfrac{-1}{2n^3} \sim \dfrac{-1}{2n^2}$, ainsi,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{-1}{2n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{-1}{2n^2}$$

2. Ainsi, $u_n - u_{n+1} \sim \dfrac{1}{2n^2}$, or $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, donc $\sum \dfrac{1}{2n^2}$ aussi, par théorème de comparaison de séries à termes positifs, $\sum (u_n - u_{n+1})$ converge, ainsi, $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.
3. Notons S la somme, ainsi $\sum\limits_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} S$, par extraction, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} S$, par somme télescopique $u_n - u_0 \xrightarrow[n\to\infty]{} S$ et donc $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S + u_0$.
4. En notant $\gamma = S + u_0$, on peut écrire $u_n = \gamma + \mathcal{O}(1)$, donc $H_n - \ln(n) = \gamma + \mathcal{O}(1)$ et donc $H_n = \ln(n) + \gamma + \mathcal{O}(1)$.

Correction de l'exercice 8. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, alors $(a-b)^2 \geqslant 0$, donc en développant, $ab \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{u_n v_n} = \sqrt{u_n}\sqrt{v_n} \leqslant \dfrac{u_n + v_n}{2}$. Or $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, comme l'ensemble des séries convergente est un espace vectoriel, $\sum \dfrac{u_n+v_n}{2}$ converge. Par comparaison de deux séries à termes positifs, $\sum \sqrt{u_n v_n}$ converge.

Correction de l'exercice 9.

Correction de l'exercice 10.

1. Supposons que pour $n \geqslant n_0$, on ait $v_{n+1} \leqslant r v_n$. Posons l'hypothèse de récurrence suivante, pour $n \geqslant n_0$: $\mathscr{P}(n)$: « $v_n \leqslant v_{n_0} r^{n-n_0}$ »
   - **Initialisation :** pour $n = n_0$, on a bien $v_{n_0} \leqslant v_{n_0} = v_{n_0}^{n_0 - n_0}$, $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie.
   - **Hérédité :** soit $n \geqslant n_0$, si $\mathscr{P}(n)$ vraie, alors $v_{n+1} \leqslant r v_n \leqslant r(v_{n_0} r^{n-n_0}) = v_{n_0} r^{n+1-n_0}$. $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion :** pour tout $n \geqslant n_0$, $v_n \leqslant u_{n_0} r^{n-n_0}$.

De même, supposons [1] que pour $n \geqslant n_0$, on ait $v_{n+1} \geqslant r v_n$. En divisant par r^{n+1}, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\dfrac{v_{n+1}}{r^{n+1}} \geqslant \dfrac{v_n}{r^n}$, ainsi la suite $(v_n/r^n)_{n \geqslant n_0}$ est croissante. Dès lors, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $v_n/r^n \geqslant v_{n_0}/r^{n_0}$. En multipliant par r^n le résultat en découle.

2. Supposons que $\ell < 1$, cherchons $\varepsilon > 0$ tel que $\ell + \varepsilon < 1$, il faut alors que $\varepsilon < 1 - \ell$. Posons donc $\varepsilon = \dfrac{1-\ell}{2}$, comme $\ell < 1$, on a $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_{n+1}/u_n| = \ell$, on peut donc dire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant n_0 \quad \Longrightarrow \quad \ell - \varepsilon \leqslant \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leqslant \ell + \varepsilon$$
posons
$$r = \ell + \varepsilon = \ell + \frac{1-\ell}{2} = \frac{1+\ell}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$$
Ainsi $r < 1$. Comme, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $|u_{n+1}|/|u_n| \leqslant r$, d'après la question 1, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $|u_n| \leqslant |u_{n_0}| r^{-n_0} r^n$, or $\sum r^n$ est une série géométrique convergente car $|r| < 1$. Donc $\sum |u_{n_0}| r^{-n_0} r^n$ converge, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum |u_n|$ converge. Ainsi, $\sum u_n$ converge absolument donc converge.

3. Supposons que $\ell > 1$, cherchons $\varepsilon > 0$ tel que $\ell - \varepsilon > 1$, il faut alors que $\varepsilon < \ell - 1$. Posons donc $\varepsilon = \dfrac{\ell - 1}{2}$, comme $\ell > 1$, on a $\varepsilon > 0$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_{n+1}/u_n| = \ell$, on peut donc dire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant n_0 \quad \Longrightarrow \ell - \varepsilon \leqslant \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \leqslant \ell + \varepsilon$$
Posons
$$r = \ell - \varepsilon = \ell - \frac{\ell-1}{2} = \frac{\ell+1}{2} > \frac{1+1}{2} = 1$$
Ainsi $r > 1$. Comme, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $|u_{n+1}|/|u_n| \geqslant r$, d'après question 1, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $|u_n| \geqslant |u_{n_0}| r^{-n_0} r^n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Ainsi, $\sum u_n$ diverge grossièrement.

4. Prenons $u_n = 1/n$, alors $u_{n+1} \sim u_n$ et donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 = \ell$ et $\sum u_n$ diverge. Prenons $u_n = 1/n^2$, alors $u_{n+1} \sim u_n$ et donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 = \ell$ et $\sum u_n$ converge. Ainsi, si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.

Correction de l'exercice 11.

Correction de l'exercice 12. Posons $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $S = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$, alors
$$0 \leqslant n u_{2n} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} u_k = S_{2n} - S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} S - S = 0$$
Alors par théorème d'encadrement, $n u_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, en multipliant par 2, $2n u_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Considérons $0 \leqslant (2n+1) u_{2n+1} = u_{2n+1} + 2n u_{2n+1} \leqslant u_{2n+1} + 2n u_{2n}$. Comme la série converge, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, par extraction $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et par ce qui précède $2n u_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, par théorème d'encadrement $(2n+1) u_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Ainsi, la suite des termes pairs de $(n u_n)_n$ tend vers 0 ainsi que la suite des termes impairs de $(n u_n)_n$ tend vers 0. D'après un théorème de cours, $n u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Correction de l'exercice 13. Soit $(u_n)_n$ une suite strictement positive, on suppose que $\sqrt[n]{u_n} \to \ell$.

1. On peut refaire une récurrence, mais proposons une méthode avec plus de panache.

1. Si $\ell < 1$, on pose $\varepsilon = (1-\ell)/2 > 0$, ainsi il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N_0 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{u_n} \leqslant \ell + \varepsilon = (1+\ell)/2 = r$$

Comme $x \mapsto x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on obtient pour tout $n \geqslant N_0$, $u_n \leqslant r^n$, comme $r < 1$, on sait que $\sum r^n$ converge (série géométrique de raison r avec $|r| < 1$), par critère de comparaison des séries à termes positifs $\sum u_n$ converge.

2. Si $\ell > 1$, on pose $\varepsilon = (\ell - 1)/2 > 0$, ainsi il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N_0 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{u_n} \geqslant \ell - \varepsilon = (1+\ell)/2 = r$$

Comme $x \mapsto x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on obtient pour tout $n \geqslant N_0$, $u_n \geqslant r^n$, comme $r > 1$, $r^n \to +\infty$, donc $u_n \to +\infty$, ainsi $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Correction de l'exercice 14. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant v_n - u_n \leqslant w_n - u_n$. Comme $\sum u_n$ et $\sum w_n$ convergent et que l'ensemble des séries convergentes est un espace vectoriel, $\sum w_n - u_n$ converge. Par comparaison entre deux SATP, $\sum v_n - u_n$ converge. Comme $\sum u_n$ converge, par somme $\sum (v_n - u_n) + u_n$ converge. Ainsi, $\sum v_n$ converge.

2. Supposons que $\sum u_n$ converge absolument. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-|u_n| \leqslant u_n \leqslant |u_n|$. Or $\sum |u_n|$ converge, par stabilité par multiplication par un scalaire, $\sum -|u_n|$ converge. En appliquant la première question, $\sum u_n$ converge.

Correction de l'exercice 15. 1. Comme $\sum 1/n^2$ converge et que l'ensemble des séries convergente est un espace vectoriel, $\sum 1/(2n)^2$ converge, de plus, par linéarité de la somme,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{24}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, en séparant les indices pairs et impairs dans $\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^2}$, il vient :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}$$

Ainsi, $\sum \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, en séparant les indices pairs et impairs :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{p=1}^{E(n/2)} \frac{1}{(2p)^2} - \sum_{p=0}^{E((n-1)/2)} \frac{1}{(2p+1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\pi^2}{24} - \frac{\pi^2}{8} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Ainsi, $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

Correction de l'exercice 16.

Correction de l'exercice 17.

Correction de l'exercice 18.

Correction de l'exercice 19.