

TD 20 - Variables aléatoires

1BCPST 2

Feuille d'exercice

Année 2025- 2026

Lois classiques

Exercice 1 : ♡ Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(q)$ des variables aléatoires indépendantes. Donner la loi, l'espérance et la variance des variables suivantes :

- 1) X^2 2) XY 3) $X + Y$ 4) $X - Y$ 5) $X^2 Y^3$ 6) $\min(X, Y)$ 7) $\max(X, Y)$

Exercice 2 : ★ Soit $Y_1, Y_2, \dots, Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes. Calculer la loi, l'espérance et la variance de X dans ces différents cas :

- 1) $X = \sum_{i=1}^n Y_i$ 2) $X = \prod_{i=1}^n Y_i$ 3) $X = \max_{1 \leq i \leq n} Y_i$ 4) $X = \min_{1 \leq i \leq n} Y_i$

Exercice 3 : ★★ Soit $X, Y \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$ indépendantes, donner la loi, l'espérance et la variance des lois suivantes : 1) $X + Y$ 2) $\max(X, Y)$ 3) $\min(X, Y)$.

Exercice 4 : ★★ Calculer la loi, l'espérance et la variance d'une variable X qui est égale au résultat maximum du lancer de trois dés.

Exercice 5 : ★ - ★★★ Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, donner la loi et l'espérance des variables suivantes :

- 1) $Y = X^2$ 2) $Y = 2^X$ 3) $Y = \frac{1}{1 + X}$ 4) $Y = |X - 1|$

Exercice 6 : ★★ Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ indépendant de $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, q)$. Montrer que $X + Y$ est binomiale si et seulement si $p = q$.

Lois à déterminer

Exercice 7 : ★ Une urne contient 6 balles numérotées de 1 à 6. On en tire trois simultanément et on note X le minimum des nombres obtenus. Donner la loi, l'espérance et la variance de X .

Exercice 8 : ★★ Dans le jeu Fort-Boyard, on dispose n urnes dont $n - 2$ contiennent de la farine et deux contiennent des cafards géants. Les n candidats doivent plonger la main dans les urnes pour récupérer une clé au fond. Les candidats passent tous à tour de rôle, ils ne peuvent pas choisir l'urne d'un précédent candidat.

1) On note X la variable représentant quel candidat sera celui à plonger sa main dans les cafards en premier. Donner la loi de X .

2) Calculer l'espérance et la variance de X .

Exercice 9 : ★★ - ★★★ Dans un jeu avec n joueurs, les joueurs se passent un nombre de proche en proche. Chaque candidat reçoit un nombre de son prédécesseur et l'envoie au candidat suivant en respectant les règles suivantes (on suppose $p \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$) :

★ Il communique le même nombre avec probabilité $2p$

★ Il augmente le nombre de 1 avec probabilité $\frac{1}{2} - p$

★ Il diminue le nombre de 1 avec probabilité $1 - p$

On note X_i la variable représentant l'ajout du $i^{\text{ème}}$ candidat.

1) Donner la loi, l'espérance et la variance de X_i

On suppose que le nombre de départ est $a \in \mathbb{N}$. On note Y_k la variable aléatoire représentant le nombre communiqué au $k^{\text{ème}}$ joueur.

- 2) Donner $Y_k(\Omega)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(Y)$ 3) Donner la loi de Y_k . 4) Calculer $\mathbb{P}(Y_n = a)$.

Exercice 10 : ★★ Une urne contient $2N$ balles, dont N rouges. On tire exactement N balles sans remise. X est la variable aléatoire représentant le nombre de balles rouges tirées.

- 1) Donner la loi de X .
- 2) Calculer l'espérance et la variance de X .

Exercice 11 : ★★ n urnes sont numérotées de 1 à n . Dans la $k^{ième}$ urne se trouvent k -boules numérotées de 1 à k . On choisit uniformément au hasard une urne, puis uniformément au hasard une boule dans cette urne.

On note U la variable représentant l'urne choisie et X la variable représentant le numéro de la boule tirée.

- 1) Donner la loi de U
- 2) Donner la loi et l'espérance de X .
- 3) Calculer un équivalent de l'espérance de X quand $n \rightarrow +\infty$.

Indication : On pourra utiliser que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln n$.

Exercice 12 : ★★★ Aux jeu des quatre chevaux, on lance un dé pour avancer son cheval sur le plateau. Si le dé tombe sur 6, on peut le relancer et continuer à avancer son pion. Le six peut ainsi arriver plusieurs fois de suite au cours du même tour pour un joueur, et donc le joueur pourra avancer son pion plusieurs fois. X est la variable représentant le nombre de cases qu'avance le pion d'un joueur sur un tour.

- 1) Supposons que les règles du jeu stipulent que le dé ne peut être relancé qu'une seule fois (au premier 6), quelle est la loi de X , et son espérance ?
- 2) Supposons que les règles du jeu stipulent que le dé ne peut être relancé que n fois pendant le tour d'un joueur. Quelle est alors la loi de X_n , et son espérance ?
- 3) Calculer l'espérance quand $n \rightarrow +\infty$. Interpréter le résultat.

Exercice 13 : ★★ Dans un jeu de société, un joueur peut être enfermé en prison. Pour se libérer, le joueur doit lancer un dé équilibré à quatre faces.

Il est libéré dès lors qu'au bout de n lancers, le joueur a obtenu chaque face possible au moins une fois. S'il n'est pas libre au bout de 10 tour, alors il est libéré au 11e tour. On note X la variable qui représente le nombre de tour qu'il faut au joueur pour se libérer.

- 1) Donner la loi de X (on pourra utiliser la formule du crible de Poincaré)
- 2) Calculer l'espérance et la variance de X .

Exercice 14 : ★★ Une urne contient N boules numérotées 1 à N . On tire $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ boules sans remise. On note X et Y le plus petit et le plus grand numéro obtenus

- 1) Pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, calculer $\mathbb{P}(X \geq k)$, en déduire la loi de X .
- 2) Pour $\ell \in \llbracket 1, N \rrbracket$, calculer $\mathbb{P}(X \leq \ell)$, en déduire la loi de Y .

Exercice 15 : ★★ Dans un jeu, on dispose d'une pièce et d'une urne contenant n boules numérotés de 1 à n .

On lance une pièce de monnaie n fois. Au bout de n lancers, on compte le nombre de "Pile" et on tire dans l'urne à boules autant de boules que le nombre de "pile" obtenus. On fait le maximum des nombres tirés sur les boules.

- 1) Donner la loi du maximum X .
- 2) Pour jouer à ce jeu, il faut payer 0.75€ par lancer de pièce et on gagne la somme d'argent représentée par le nombre X en euros. Est-il rentable de jouer à ce jeu ?

Exercice 16 : ★★ On tire avec remise dans une urne contenant N boules numérotées 1 à N . Pour tout $n \geq 1$, on note X_n le nombre de numéros non encore sortis à l'issue du $n^{ième}$ tirage.

- 1) Quelle est la loi de X_1 ?
- 2) Pour $n \geq 1$, déterminer $X_n(\Omega)$.
- 3) En utilisant la formule des probabilités totales, démontrer que pour $n \geq 2$ et $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$:

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{N-k}{N} \mathbb{P}(X_{n-1} = k) + \frac{k+1}{N} \mathbb{P}(X_{n-1} = k+1)$$

- 4) En déduire que $(\mathbb{E}(X_n))_{n \geq 1}$ est géométrique et donner son expression en fonction de n .