

TD 21 - Espaces vectoriels

1BCPST 2

Feuille d'exercice

Année 2025- 2026

Familles de vecteurs

Exercice 1 : (en 1 minute ♡) Dire si ces vecteurs forment une famille libre ou non :

1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ 4) $(1, 2, 3), (1, -2, 3)$ 5) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
6) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 7) $\begin{pmatrix} 48 \\ 25 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 78 \\ 71 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 19 \\ 7 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ 9) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2 : (en 1 minute ♡) Dire si ces vecteurs forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ ou non :

$n = 2$: 1) $\begin{pmatrix} 48 \\ 25 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 78 \\ 71 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 19 \\ 7 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 15 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 45 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
 $n = 3$: 5) $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 7) $(1, 1, 1), (1, 1, 0)$ et $(1, -1, 0)$

Exercice 3 : ★ Pour toutes les familles de vecteurs suivantes, dire si elles sont une famille libre,

génératrice ou une base de E . 1) $E = \mathbb{C}^2$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3i \\ -6 \end{pmatrix}$ 2) $E = \mathbb{C}^3$: $\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3) $E = \mathbb{R}^4$: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 4) $E = \mathbb{R}^5$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 : ★★ Soit $(u_1, \dots, u_p) \in \mathbb{R}^n$ une famille de vecteurs. Pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on pose $v_k = \sum_{i=1}^k u_i$.

Montrer que $(u_1, \dots, u_p)$ est libre si et seulement si $(v_1, \dots, v_p)$ est libre

Exercice 5 : ★ Compléter les familles libres suivantes en base de $\mathbb{K}^n$:

1) $\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^3$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 2) $\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^4$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 3) $\mathbb{K}^n = \mathbb{C}^4$ et $\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$

Exercice 6 : ★

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de a la famille formée par les vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ est-elle libre ?

Exercice 7 : ★ Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de a la famille formée par les vecteurs

$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? Dans ce cas, exprimer la base canonique dans cette base.

Exercice 8 : ★ 1) Montrer que $e_1 = (1, 1, 1), e_2 = (1, 1, 0), e_3 = (1, 0, -1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) On pose $B = (e_1, e_2, e_3)$ et B_c la base canonique. Calculer $\text{Mat}_{B_c}(B)$ et $\text{Mat}_B(B_c)$.

3) Donner les coordonnées de $(9, 5, 2)$ dans cette base.

Espaces vectoriels

Exercice 9 : ★ Donner une bases des espaces vectoriels suivants :

- 1) $\text{Vect}((1, 1, 2), (1, 1, 3), (0, 0, 1))$ 2) $\text{Vect}((0, 1, 0, 2), (1, 0, 3, 1), (1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 1), (1, 2, 3, 4))$
 3) $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}\right)$ 4) $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ 5) $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 2i \end{pmatrix}\right)$

Exercice 10 : ★ - ★★ Les ensembles E suivants sont-ils des sous espace vectoriels de $\mathbb{R}^n$? Si oui, trouver une base et leur dimension. (Pour le 8) on se demandera si E est un sev de $\mathbb{C}^4$)

- $n = 3$ 1) $E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \right\}$ 2) $E = \{(1 + t, t, 1 - t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$
 3) $E = \{(t + s, s - t, s) \in \mathbb{R}^3 \mid (s, t) \in \mathbb{R}^2\}$ 4) $E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases} \right\}$
 5) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 0\}$ 6) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + (y - z)^2 = 0\}$
 $n = 4$ 7) $E = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x - 3y + 2z + t = 0 \\ 2x + 2y + 2z - t = 0 \end{cases} \right\}$ 8) $E = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4 \mid \begin{cases} x + iy + t = 0 \\ ix + y - t = 0 \\ z + it = 0 \end{cases} \right\}$

Exercice 11 : (Intersections ★★) On donne $E = \text{Vect}((1, 1, 1, 0), (1, -1, 0, 1), (1, 0, 1, 1))$, $F = \text{Vect}((1, 2, 3, 4), (-1, -1, 1, 1))$ et $G = \text{Vect}((-1, 0, 5, 6), (1, 0, 0, 1))$. Calculer la dimension de $E \cap F$, $E \cap G$, $F \cap G$ et $E \cap F \cap G$.

Exercice 12 : ★ On pose $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0 \text{ et } 2x + y + z - t = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, -2, 1, 1), (1, 2, -3, 1), (5, -3, -2, 5))$.

- 1) Justifier que F et G sont des sev de $\mathbb{R}^4$ et donner leur dimension.
 2) Montrer que $G \subset F$. En déduire que $G = F$.

Exercice 13 : ★ On pose $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 3, 4)$, $v_3 = (3, 1, 4, 2)$, $v_4 = (10, 4, 13, 7)$, $v_5 = (1, 7, 8, 14)$.
 1) La famille de cinq vecteurs est-elle libre ? Quel est son rang ?
 2) Extraire de cette famille une base B de $E = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$.
 3) Compléter B pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 14 : ★★ Si E et F sont deux sev de $\mathbb{K}^n$, on définit $E + F = \{x + y \mid x \in E \text{ et } y \in F\}$

- 1) Montrer que $E + F$ est un sev de $\mathbb{K}^n$
 2) Exemple concret : On pose $E = \text{Vect}((1, 1, 1), (1, 1, 0))$ et $F = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 0, 1))$, quel est l'espace vectoriel $E + F$? Donner une base de $E + F$. Dans la suite E et F sont deux sev quelconques.
 3) Si $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et $F = \text{Vect}(f_1, \dots, f_n)$, montrer que $E + F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_n)$
 4) On suppose que $E \cap F = \{0\}$, calculer $\dim(E + F)$ en fonction des dimensions de E et de F .
 5) Calculer $\dim(E + F)$ dans le cas général. Comparer avec la question 2).
 6) Montrer que $E + F$ est le plus petit espace vectoriel au sens de l'inclusion contenant $E \cup F$.
 7) En utilisant la question précédente, interpréter le résultat de la question 5).

Exercice 15 : ★★ On se place dans E un sous espace-vectoriel de $\mathbb{K}^n$ de dimension 2.

Montrer qu'il existe F, G , et H des sous espace-vectoriel non nuls de E tels que :

$$F + G = F + H = G + H = E \text{ et } F \cap G = G \cap H = F \cap H = \{0\}$$

Exercice 16 : ★★ Si E et F sont deux sev de $\mathbb{K}^n$,

Montrer que $E \cup F$ est un sev de $\mathbb{K}^n$ si et seulement si $E \subset F$ ou $F \subset E$.