

TD 21 - Espaces vectoriels

1BCPST 2

Feuille d'exercice

Année 2025- 2026

Familles de vecteurs

Exercice 1 : (*en 1 minute*) Dire si ces vecteurs forment une famille libre ou non :

- 1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ 4) $(1, 2, 3), (1, -2, 3)$ 5) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
- 6) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 7) $\begin{pmatrix} 48 \\ 25 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 78 \\ 71 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 19 \\ 7 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ 9) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Réponses : 1) Non (il y a 0) 2) Oui (ils sont non conlinéaires) 3) Non (ils sont conlinéaires)
 4) Oui (ils sont non conlinéaires) 5) Oui (ils sont non conlinéaires) 6) Oui (ils sont triangulaires)
 7) Non (ils sont trois dans $\mathbb{R}^2$) 8) Non (le 1er moins le 2e est colinéaire au 3e)
 9) Non car $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

Exercice 2 : (*en 1 minute*) Dire si ces vecteurs forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$ ou non :

- $n = 2$: 1) $\begin{pmatrix} 48 \\ 25 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 78 \\ 71 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 19 \\ 7 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 15 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- $n = 3$: 5) $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 7) $(1, 1, 1), (1, 1, 0)$ et $(1, -1, 0)$

Réponses : 1) Oui (il y a au moins deux vecteurs non colinéaires) 2) Oui (même raison)
 3) Non (colinéaires donc engendrent un espace de dimension 1) 4) Non (même raison)
 5) Non (coplanaires donc engendrent un espace de dimension 2) 6) Non (pas assez de vecteurs)
 7) Oui (Famille libre de trois vecteurs donc base)

Exercice 3 : Pour toutes les familles de vecteurs suivantes, dire si elles sont une famille libre, génératrice

ou une base de E . 1) $E = \mathbb{C}^2$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3i \\ -6 \end{pmatrix}$ 2) $E = \mathbb{C}^3$: $\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3) $E = \mathbb{R}^4$: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 4) $E = \mathbb{R}^5$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Réponses : 1) Les vecteurs sont colinéaires : $\begin{pmatrix} 3i \\ -6 \end{pmatrix} = 3i \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$ donc ni libre, ni génératrice ni une base.

2) On a $\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ i & 1 & 0 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3$ Donc la famille est libre, c'est une base car elle possède 3 vecteurs et donc elle est aussi génératrice.

3) Elle n'est pas libre, car elle possède 5 vecteurs, ce n'est donc pas une base non plus. Par ailleurs :

$$\text{rg} \begin{pmatrix} \textcolor{red}{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \textcolor{red}{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 3$$

Donc la famille n'est pas génératrice non plus, sinon le rang aurait été 4.

$$4) \text{ rg} \begin{pmatrix} \textcolor{red}{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leq 4 \text{ donc ce n'est pas une famille génératrice de } \mathbb{R}^5.$$

Ce n'est donc pas une base non plus. Par ailleurs, si elle était libre, comme elle est composée de 5 vecteurs, elle formerait une base. On en déduit qu'elle n'est pas libre.

Exercice 4 : Soit $(u_1, \dots, u_p) \in \mathbb{R}^n$ une famille de vecteurs. Pour $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on pose $v_k = \sum_{i=1}^k u_i$.

Montrer que $(u_1, \dots, u_p)$ est libre si et seulement si $(v_1, \dots, v_p)$ est libre

Réponses : $\boxed{\Rightarrow}$ On pose $\sum_{i=1}^p \lambda_i v_i = 0$ et on veut montrer que tous les λ_i sont nuls. On a :

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^p \lambda_i \sum_{j=1}^i u_j = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=j}^p \lambda_i \right) u_j \text{ Comme la famille des } (u_j) \text{ est libre, on trouve :}$$

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{i=j}^p \lambda_i = 0. \text{ Cela fait un système d'équation homogène écholonné de rang } p : \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_p = 0 \\ \lambda_2 + \dots + \lambda_p = 0 \\ \vdots \\ \lambda_p = 0 \end{cases}$$

On trouve ainsi l'unique solution $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$ donc la famille des (v_i) est libre.

$\boxed{\Leftarrow}$ On pose $\sum_{i=1}^p \lambda_i u_i = 0$ et on veut montrer que tous les λ_i sont nuls. On a pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $u_i = v_i - v_{i-1}$ donc :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i &= \lambda_1 u_1 + \sum_{i=2}^p \lambda_i (v_i - v_{i-1}) = \lambda_1 v_1 + \sum_{i=2}^p \lambda_i v_i - \sum_{i=2}^p \lambda_i v_{i-1} = \sum_{i=1}^p \lambda_i v_i - \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_{i+1} v_i \\ &= \sum_{i=1}^{p-1} (\lambda_i - \lambda_{i+1}) v_i + \lambda_p v_p. \text{ Or la famille des } (v_i) \text{ est indépendante, donc : } \forall i \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, \lambda_i - \lambda_{i+1} = 0 \text{ et } \lambda_p = 0. \end{aligned}$$

Cela donne à nouveau un système d'équation homogène échelonné de rang p :

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \vdots \\ \lambda_{p-1} - \lambda_p = 0 \\ \lambda_p = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_2 = \lambda_1 \\ \lambda_3 = \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_p = \lambda_{p-1} \\ \lambda_p = 0 \end{cases} \text{ On trouve donc l'unique solution : } \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0 \text{ donc la}$$

famille des (u_i) est libre.

Exercice 5 : Compléter les famille libres suivantes en base de $\mathbb{K}^n$:

$$1) \mathbb{K}^n = \mathbb{R}^3 \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 2) \mathbb{K}^n = \mathbb{R}^4 \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 3) \mathbb{K}^n = \mathbb{C}^4 \text{ et } \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$$

Réponses : A chaque fois on peut rajouter des vecteurs de la base canonique qui vont bien. C'est à dire les vecteurs qui correspondent aux coordonnées non différenciées.

- 1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base, en effet : $\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$
- 2) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base, en effet : $\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \textcolor{red}{1} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 4$
- 3) $\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$ donne : $\text{rg} \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} \textcolor{red}{-1} & 0 & 0 & i \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 0 & 1 & 1+i \\ 0 & 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} = 4$
- C'est donc une base de $\mathbb{C}^4$

Exercice 6 : Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de a la famille formée par les vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ est elle libre ?

Réponses : On a $\text{rg} \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} \textcolor{red}{1} & 1 & a \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & \textcolor{red}{1-a} & 1-a^2 \\ 0 & a-1 & 1-a \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{pmatrix}$

Or $2-a-a^2 = (1-a)(a+2)$. On remarque que la matrice est de rang 3 si et seulement si $1-a \neq 0$ et $(1-a)(2+a) \neq 0$.

Donc la famille est libre si et seulement si $a \notin \{-2, 1\}$

Exercice 7 : Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour quelles valeurs de a la famille formée par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ est elle une base de $\mathbb{R}^3$? Dans ce cas, exprimer la base canonique dans cette base.

Réponses : On a $\text{rg} \begin{pmatrix} \textcolor{red}{1} & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & \textcolor{red}{6} & 4 \\ 0 & 6 & 3a \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 3a-4 \end{pmatrix}$ On remarque que la matrice est de rang 3 si et seulement si $a \neq \frac{4}{3}$.

Donc la famille est libre si et seulement si $a \neq \frac{4}{3}$ Invertis la matrice par méthode miroir...

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} \textcolor{red}{1} & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & a & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 3a & -3 & 0 & 3 \end{array} \right) \\ & \iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3a-4 & 1 & -2 & 3 \end{array} \right) \iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3a-4} & \frac{-2}{3a-4} & \frac{3}{3a-4} \end{array} \right) \\ & \iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & \frac{-12(a+1)}{3a-4} & \frac{6(5a-4)}{3a-4} & \frac{12}{3a-4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3a-4} & \frac{-2}{3a-4} & \frac{3}{3a-4} \end{array} \right) \iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2(a+1)}{3a-4} & \frac{5a-4}{3a-4} & \frac{2}{3a-4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3a-4} & \frac{-2}{3a-4} & \frac{3}{3a-4} \end{array} \right) \\ & \iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-a-8}{3a-4} & \frac{10a-8}{3a-4} & \frac{4}{3a-4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2(a+1)}{3a-4} & \frac{5a-4}{3a-4} & \frac{2}{3a-4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3a-4} & \frac{-2}{3a-4} & \frac{3}{3a-4} \end{array} \right) \end{aligned}$$

L'inverse a une tête un peu moche, mais on peut dire que dans la nouvelle base les coordonnées des vecteurs :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ a pour coordonnées : } \frac{1}{3a-4}(-a-8, 10a-8, 4)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ a pour coordonnées : } \frac{1}{3a-4}(-2(a+1), 5a-4, 2)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ a pour coordonnées : } \frac{1}{3a-4}(1, -2, 3)$$

- Exercice 8 :** 1) Montrer que $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 1, 0)$, $e_3 = (1, 0, -1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
 2) On pose $B = (e_1, e_2, e_3)$ et B_c la base canonique. Calculer $\text{Mat}_{B_c}(B)$ et $\text{Mat}_B(B_c)$.
 3) Donner les coordonnées de $(9, 5, 2)$ dans cette base.

Réponses : 1) $\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3$

Donc c'est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

2) On a $\text{Mat}_{B_c}(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\text{Mat}_B(B_c) = \text{Mat}_{B_c}(B)^{-1}$ donc on inverse la matrice.

Avec la méthode miroir (que je vous laisse faire), on trouve : $\text{Mat}_B(B_c) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

3) On calcule $\text{Mat}_B(B_c) \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Ainsi $(9, 5, 2) = 6e_1 - e_2 + 4e_3$.

Espaces vectoriels

Exercice 9 : Donner une bases des espaces vectoriels suivants :

1) $\text{Vect}((1, 1, 2), (1, 1, 3), (0, 0, 1))$ 2) $\text{Vect}((0, 1, 0, 2), (1, 0, 3, 1), (1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 1), (1, 2, 3, 4))$
 3) $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}\right)$ 4) $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ 5) $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 2i \end{pmatrix}\right)$

Réponses : On note E l'espace vectoriel dont on souhaite trouver une base. 1) La famille $(1, 1, 2), (1, 1, 3), (0, 0, 1)$ est génératrice, mais pas libre :

On a $(1, 1, 3) - (1, 1, 2) = (0, 0, 1)$ Donc la famille est liée. On peut donc supprimer un vecteur pour obtenir une base. On prend $((1, 1, 2), (0, 0, 1))$. C'est une base car la famille est toujours génératrice et elle est libre car les vecteurs ne sont pas colinéaires.

2) La famille $((0, 1, 0, 2), (1, 0, 3, 1), (1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 1), (1, 2, 3, 4))$ est génératrice de E mais clairement pas

libre. $\text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$

4

Donc l'espace vectoriel est de dimension 4, comme c'est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, on en déduit $E =$

$\text{Vect}((0, 1, 0, 2), (1, 0, 3, 1), (1, 1, 1, 1), (0, 1, 0, 1), (1, 2, 3, 4)) = \mathbb{R}^4$ et donc $((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$

est une base de E (la base canonique de $\mathbb{R}^4$)

3) $\left(\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice mais pas libre car trois vecteurs pour dimension 2 maxi-

mum. On peut donc choisir $\left(\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}\right)$ pour base de E car ce sont deux vecteurs non colinéaires.

On a $\dim E = 2$ donc $E = \mathbb{C}^2$. On en déduit que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de E .

4) On a $2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc la famille est liée. On peut donc supprimer un vecteur pour la rendre

libre. On a $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ qui est clairement libre (vecteurs non colinéaires) et génératrice de E donc c'est une base de E .

5) Tous les vecteurs sont colinéaires donc $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ est une base de E .

Exercice 10 : Les ensembles E suivants sont-ils des sous espace vectoriels de $\mathbb{R}^n$? Si oui, trouver une base et leur dimension. (Pour le 8) on se demandera si E est un sev de $\mathbb{C}^4$)

$n = 3$ 1) $E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \right\}$ 2) $E = \{(1+t, t, 1-t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$

3) $E = \{(t+s, s-t, s) \in \mathbb{R}^3 \mid (s, t) \in \mathbb{R}^2\}$ 4) $E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + z = 1 \end{cases} \right\}$

5) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 0\}$ 6) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + (y-z)^2 = 0\}$

$n = 4$ 7) $E = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x - 3y + 2z + t = 0 \\ 2x + 2y + 2z - t = 0 \end{cases} \right\}$ 8) $E = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4 \mid \begin{cases} x + iy + t = 0 \\ ix + y - t = 0 \\ z + it = 0 \end{cases} \right\}$

Réponses : 1) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases}$

Donc $E = \{(z, -2z, z), \mid z \in \mathbb{R}\}$ On en déduit $E = \text{Vect}((1, -2, 1))$ c'est un espace vectoriel de dimension 1.

2) $E = \{(1+t, t, 1-t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$

N'est pas un espace vectoriel, en effet $(0, 0, 0)$ n'appartient pas à E :

On a $(1+t, t, 1-t) = (0, 0, 0) \iff 1+t = 0$ et $t = 0$ et $1-t = 0 \iff t = 0$ et $t = 1$ et $t = -1$ Impossible.

3) $E = \{(t+s, s-t, s) \mid (s, t) \in \mathbb{R}^2\} = \{s(1, 1, 1) + t(1, -1, 0) \mid (s, t) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, 1, 1), (1, -1, 0))$.

Les vecteurs sont non colinéaires. Donc E est un espace vectoriel de dimension 2

4) E n'est pas un espace vectoriel, en effet, $(0, 0, 0) \notin E$ car $(0, 0, 0)$ ne vérifie pas les équations.

5) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 0\}$ n'est pas un espace vectoriel en effet :

$(1, 1, 0) \in E$ et $(0, 1, 1) \in E$ mais $(1, 1, 0) + (0, 1, 1) = (1, 2, 1) \notin E$.

6) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + (y-z)^2 = 0\} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \right\} = \{(0, -z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$

On trouve $E = \text{Vect}((0, -1, 1))$ Donc E est un espace vectoriel de dimension 1.

7) $\begin{cases} x - 3y + 2z + t = 0 \\ 2x + 2y + 2z - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 3y + 2z + t = 0 \\ -3x - y + 4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = -10x - 10z \\ y = -3x + 4z \end{cases}$ Donc $E = \{(x, -3x + 4z, z, -10x - 10z) \mid (x, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}((1, -3, 0, -10), (0, 4, 1, -10))$ est un espace vectoriel de dimension 2.

8) $\begin{cases} x + iy + t = 0 \\ ix + y - t = 0 \\ z + it = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z + it = 0 \\ x + iy + t = 0 \\ ix + y - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z + it = 0 \\ x + iy + t = 0 \\ (1+i)x + (1+i)y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -(1+i)y \\ t = (1-i)y \\ x = -y \end{cases}$

Donc $E = \{(-y, y, -(1+i)y, (1-i)y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((-1, 1, -1-i, 1-i))$ donc E est un espace vectoriel de dimension 1.

Exercice 11 : On pose $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0 \text{ et } 2x + y + z - t = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, -2, 1, 1), (1, 2, -3, 1), (5, -3, -2, 5))$.

- 1) Justifier que F et G sont des sev de $\mathbb{R}^4$ et donner leur dimension.
- 2) Montrer que $G \subset F$. En déduire que $G = F$.

Réponses : 1) On a : $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + z - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y - z \\ t = 2x + y + z = -y - z \end{cases}$

Donc $F = \{(-y - z, y, z, -y - z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \boxed{\text{Vect}((-1, 1, 0, -1), (-1, 0, 1, -1)) \text{ est de dimension } 2}$.

Pour G , on a $\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$ donc $\boxed{\dim G = 2}$

2) On a $G = \text{Vect}((1, -2, 1, 1), (1, 2, -3, 1))$. Il suffit de montrer que $(1, -2, 1, 1)$ et $(1, 2, -3, 1)$ sont des vecteurs de F car alors on a $G \subset F$ (G est le plus petit sev qui contient ces vecteurs).

On a bien $(1, -2, 1, 1)$ et $(1, 2, -3, 1)$ qui vérifient les équations qui définissent F donc $G \subset F$.

$(1 + (-2) + 1 = 1 + 2 + (-3) = 0$ et $2 \cdot 1 + (-2) + 1 - 1 = 2 \cdot 1 + 2 + (-3) - 1 = 0$) Par ailleurs, $\dim F = \dim G$ donne $\boxed{F = G}$.

Exercice 12 : On pose $v_1 = (1, 1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 3, 4)$, $v_3 = (3, 1, 4, 2)$, $v_4 = (10, 4, 13, 7)$, $v_5 = (1, 7, 8, 14)$.

- 1) La famille de cinq vecteurs est-elle libre ? Quel est son rang ?
- 2) Extraire de cette famille une base B de $E = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$.
- 3) Compléter B pour obtenir une base de $\mathbb{R}^4$.

Réponses : 1) La famille n'est clairement pas libre, car ce sont 5 vecteurs de $\mathbb{R}^4$: il y a au moins un vecteur de trop.

On a $\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 4 & 13 & 8 \\ 1 & 4 & 2 & 7 & 14 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -6 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & -1 & -3 & 13 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 10 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 15 & -5 \\ 0 & 0 & -7 & -21 & -7 \end{pmatrix} = 3$

car les deux dernières lignes sont colinéaires. Donc la famille est de $\boxed{\text{rang } 3}$.

2) Il faut trouver 3 vecteurs qui forment une famille libre, donc par exemple $\boxed{(v_1, v_2, v_3)}$ est une base de E . En effet, si on calcule le rang comme pour la question précédente, cela revient à enlever les deux dernières colonnes et on trouve bien un rang qui vaut 3.

3) On peut ajouter $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ en effet en calculant le rang de (v_1, v_2, v_3, e_4) comme à la question 1), on trouve que le rang vaut 4. Donc $\boxed{(v_1, v_2, v_3, e_4)}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 13 : Si E et F sont deux sev de $\mathbb{K}^n$, on définit $E + F = \{x + y \mid x \in E \text{ et } y \in F\}$

- 1) Montrer que $E + F$ est un sev de $\mathbb{K}^n$
- 2) Exemple concret : On pose $E = \text{Vect}((1, 1, 1), (1, 1, 0))$ et $F = \text{Vect}((1, 0, 0), (0, 0, 1))$, quel est l'espace vectoriel $E + F$? Donner une base de $E + F$.
Dans la suite E et F sont deux sev quelconques.
- 3) Si $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ et $F = \text{Vect}(f_1, \dots, f_n)$, montrer que $E + F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_n)$
- 4) On suppose que $E \cap F = \{0\}$, calculer $\dim(E + F)$ en fonction des dimensions de E et de F .
- 5) Calculer $\dim(E + F)$ dans le cas général. Comparer avec la question 2).
- 6) Montrer que $E + F$ est le plus petit espace vectoriel au sens de l'inclusion contenant $E \cup F$.
- 7) En utilisant la question précédente, interpréter le résultat de la question 5).

Réponses : 1) Déjà, on a $0 \in E$ et $0 \in F$ donc $0 + 0 = 0 \in E + F$ donc $E + F \neq \emptyset$. Ainsi $u, v \in E + F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $u = x + y$ et $v = x' + y'$ avec $x, x' \in E$ et $y, y' \in F$.

On a donc $u + \lambda v = (x + \lambda x') + (y + \lambda y') \in E + F$ car E et F sont des espaces vectoriels.

Donc $E + F$ est un espace vectoriel.

2) On a $E = \{(x+y, x+y, x) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ et $F = \{(z, 0, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\}$.

On a donc $E + F = \{(x+y+z, x+y, x+t) \mid (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4\} = \text{Vect}((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1))$. En calculant le rang, on détermine rapidement que $\dim(E + F) = 3$ donc $E + F = \mathbb{R}^3$.

On peut donc prendre la base canonique de $\mathbb{R}^3$ pour faire une base de $E + F$.

3) On pose $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_n)$ une base de F .

Alors $E + F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_n)$ donc $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_n)$ est une famille génératrice de $E + F$.

On va montrer que c'est une base : il reste à montrer que la famille est libre.

Si on a $\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^n \mu_i f_i = 0$ alors $\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i = -\sum_{i=1}^n \mu_i f_i \in E \cap F = \{0\}$ donc $\sum_{i=1}^p \lambda_i e_i = 0 = \sum_{i=1}^n \mu_i f_i$. Comme ce sont des bases, on en déduit d'une part $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0$ d'autre part $\mu_1 = \dots = \mu_n = 0$.

En conclusion, $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_n)$ est libre et $\dim(E + F) = p + n$.

Donc $\dim(E + F) = \dim E + \dim F$.

4) On a $x \in E + F \iff \exists e \in E, f \in F \mid x = e + f \iff \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K} \mid x = \sum_{i=1}^p \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^n \mu_i f_i$

$\iff x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_n)$. Donc $E + F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_n)$.

5) On note $(a_1, \dots, a_q)$ une base de $E \cap F$. Qu'on complète en base de E : $(a_1, \dots, a_q, e_{q+1}, \dots, e_p)$ et en base de F : $(a_1, \dots, a_q, f_{q+1}, \dots, f_n)$.

On pose alors $G = \text{Vect}(f_{q+1}, \dots, f_n)$. On a va montrer deux choses :

$E \cap G = \emptyset$: En effet si $x \in E \cap G$ alors $x \in G$ donne $x = \sum_{i=q+1}^n x'_i f_i$.

Par ailleurs, on a $x \in E \cap F$ car $G \subset F$ donc $x = \sum_{i=1}^q x_i e_i$.

On en déduit $\sum_{i=1}^q x_i e_i = \sum_{i=q+1}^n x'_i f_i$. Or $(a_1, \dots, a_q, f_{q+1}, \dots, f_n)$ est une famille libre, donc $x_1 = \dots = x_q = x'_{q+1} = \dots = x'_n = 0$ donc $x = 0$. On a bien $E \cap G = \emptyset$.

$E + F = F + G$ En effet $E + F = \text{Vect}(a_1, \dots, a_q, e_{q+1}, \dots, e_p, a_1, \dots, a_q, f_{q+1}, \dots, f_n)$
 $= \text{Vect}(a_1, \dots, a_q, e_{q+1}, \dots, e_p, f_{q+1}, \dots, f_n) = E + G$ en retirant les doublons.

On en conclut assez rapidement : $\dim(E + F) = \dim(E + G) = \dim E + \dim G = p + (n - q) = p + n - q$

Donc $\dim(E + F) = \dim E + \dim F - \dim E \cap F$

6) Si $E \cup F \subset G$ avec G un sev de $\mathbb{K}^n$, on veut montrer que $E + F \subset G$. C'est facile : on a $E \subset G$ et $F \subset G$. Donc $\forall x \in E + F, x = e + f$ avec $e \in E$ et $f \in F$ donc $e, f \in G$, donc $e + f \in G$. On a bien $x \in G$.

Donc $E \cup F \subset G$.

7) La formule ressemble à celle sur le cardinal de l'union $\text{Card}(E \cup F)$. Cependant elle est sur les dimension d'espaces vectoriels. Or comme $E \cup F$ n'est pas un espace vectoriel, on ne peut pas considérer sa dimension. A la place, on utilise donc l'espace vectoriel $E + F$ qui est le plus petit espace vectoriel qui contient $E \cup F$ (c'est l'espace vectoriel le plus "proche" de $E \cup F$.) On retrouve alors la même formule que sur les cardinaux,

à savoir : $\dim(E + F) = \dim E + \dim F - \dim E \cap F$

Exercice 14 : On se place dans E un sous espace-vectoriel de $\mathbb{K}^n$ de dimension 2.

Montrer qu'il existe F, G , et H des sous espace-vectoriel non nuls de E tels que :

$F + G = F + H = G + H = E$ et $F \cap G = G \cap H = F \cap H = \{0\}$

.....

Réponses : On a $E = \text{Vect}(e_1, e_2)$ avec (e_1, e_2) un base de E .

En analysant la situations, on a peut de possibilités en terme d'espaces vectoriels. Déjà en terme de dimension, si $\dim F = 0$ alors $F = \{0\}$ et les propriété de l'exercice ne peuvent pas être vérifiées car $F + G = G = E$ et $F + H = H = E$ donne $H \cap G = E \neq \emptyset$.

De même Si $\dim F = 2$ alors $F = E$ et les propriété au dessus ne peuvent pas être vérifiées car $G \cap F =$

$G \cap E = G = \{0\}$ et de même $H \cap F = H = \{0\}$ donne $G \cap H = \{0\}$.

Donc $\dim F = 1$. De la même manière, par symétrie on a $\dim G = \dim H = 1$.

Ils sont donc tous de dimension 1. On peut donc déjà poser $F = \text{Vect}(e_1)$ et $G = \text{Vect}(e_2)$. On a alors bien $F + G = E$ et $F \cap G = \{0\}$ (le seul vecteur colinéaire à e_1 et e_2 est x).

Reste à définir H , on doit trouver un autre vecteur non colinéaire à e_1 ou e_2 . Par exemple $H = \text{Vect}(e_1 + e_2)$.

On a alors bien le résultat car $F + H = \text{Vect}(e_1, e_1 + e_2) = \text{Vect}(e_1, e_2) = E$ et $G + H = \text{Vect}(e_2, e_1 + e_2) = \text{Vect}(e_2, e_1) = E$. Par ailleurs, $e_1 + e_2$ n'est ni colinéaire à e_1 , ni à e_2 donc $F \cap H = \{0\}$ et $G \cap H = \{0\}$.

Exercice 15 : Si E et F sont deux sev de $\mathbb{K}^n$,

Montrer que $E \cup F$ est un sev de $\mathbb{K}^n$ si et seulement si $E \subset F$ ou $F \subset E$.

.....

Réponses : $\Leftarrow$ C'est facile : si $E \subset F$ par exemple, alors $E \cup F = F$ est un sev de $\mathbb{K}^n$. Si $F \subset E$ alors $E \cup F = E$ est un sev de $\mathbb{K}^n$.

$\Rightarrow$ C'est plus compliqué. On veut montrer que $F \subset E$ ou $E \subset F$. Supposons qu'on a $E \not\subset F$ et montrons qu'alors on a forcément $F \subset E$. Soit $f \in F$, on veut montrer que $f \in E$.

On sait qu'il existe $x \in E \setminus F$. On a alors $f \in E \cup F$ et $x \in E \cup F$, donc $f + x \in E \cup F$ car $E \cup F$ est un sev. Donc $x + f \in E$ ou $x + f \in F$.

Si $x + f \in F$, alors $x = (x + f) - f \in F$ car F est un sev. C'est contradictoire car on a posé $x \notin F$.

Donc la seule possibilité est que $x + f \in E$. On en déduit que $f = (x + f) - x \in E$ car E est un sev de $\mathbb{K}^n$.

On a bien montré que $f \in E$ et donc que $F \subset E$.

Exercice 16 : Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$ et a et b deux réels distincts.

1) On désigne par F le sous espace vectoriel de E constitué des polynômes dont a et b sont racines. Déterminer la dimension de F .

2) On pose G l'ensemble des polynômes de E tels que a soit une racine multiple, démontrer que G est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

.....
