

TD 22 - Applications Linéaires

1BCPST 2

Feuille d'exercice

Année 2025- 2026

Applications linéaires

Exercice 1 : ♥ Dans chaque cas dire si f est une application linéaire ou pas. Si oui trouver une base de son image et son noyau et dire si elle est injective ou surjective.

- 1) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \rightarrow x \end{cases}$ 2) $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow 2 \end{cases}$ 3) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \rightarrow (y, x) \end{cases}$ 4) $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ x \rightarrow (x, 0, x) \end{cases}$
5) $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ x \rightarrow (x, -x, 1) \end{cases}$ 6) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \rightarrow (x - z, 2y) \end{cases}$ 7) $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \rightarrow (xy, xz, zy) \end{cases}$

Exercice 2 : ★ Trouver une base de l'image et du noyau de f et dire si elle est injective ou surjective.

- 1) $f : (x, y, z, t) \rightarrow (x - y, z - t, t + x, z + y)$ 2) $f : (x, y, z, t) \rightarrow (x + 3y + z + t, 2x + y + z - t, x + z)$
3) $f : (x, y, z, t, w) \rightarrow (x + z + t + w, y + 2z + 3t + w)$
4) $f : (x, y, z) \rightarrow (2x + y + 3z, 5x - 3y - z, x + 2y - 2z)$

Exercice 3 : ★★ Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$ on pose $g : \begin{cases} (\mathbb{K}^n)^2 \rightarrow \mathbb{K}^n \\ (x, y) \mapsto f(x) + f(y) \end{cases}$
Dans cet exercice on identifie $(\mathbb{K}^n)^2$ à $\mathbb{K}^{2n}$.

- 1) Montrer que $g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^{2n}, \mathbb{K}^n)$. 2) Calculer $\text{Im}(g)$ et $\text{rg}(g)$
3) Calculer $\dim \text{Ker}(g)$ en fonction du rang de f .
4) On suppose que f est injective, donner une base de $\text{Ker}(g)$.
5) Donner la matrice de g dans la base canonique en fonction de la matrice A de f dans la base canonique.

Exercice 4 : ★★ On pose $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^n)$. On pose $h : \begin{cases} \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^{2n} \\ x \mapsto (f(x), g(x)) \end{cases}$

Dans cet exercice on identifie $(\mathbb{K}^n)^2$ à $\mathbb{K}^{2n}$.

- 1) Montrer que h est une application linéaire.
2) Exprimer $\text{Ker } h$ avec de $\text{Ker } f$ et $\text{Ker } g$ 3) Exprimer $\text{rg}(h)$ en fonction de $\text{rg}(f)$ et $\text{rg}(g)$.
4) Soient A et B sont respectivement les matrices de f et g dans la base canonique. Donner la matrice de h dans la base canonique en fonction de A et B .

Exercice 5 : ★ Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ non nulle. Calculer $\text{rg}(f)$.

Exercice 6 : ★★★ Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que $\dim \text{Ker}(g \circ f) \leq \dim \text{Ker } g + \dim \text{Ker } f$.

Exercice 7 : ★★ Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ une application linéaire telle que $\text{Ker}(f \circ f) = \text{Ker } f$.
Montrer que $\text{Im}(f \circ f) = \text{Im } f$

Exercice 8 : ★★ - ★★★ Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $f \circ f = f + \text{id}_E$. Montrer que f est un isomorphisme.

Exercice 9 : Soit $f \in \mathcal{L}(E, E)$ une application linéaire. 1) Justifier que $f^n \in \mathcal{L}(E, E)$.

- 2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \text{Ker } f^{n-1} \subset \text{Ker } f^n$.
3) En déduire que les suites $(\text{rg } f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\dim \text{Ker } f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent.
4) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Ker}(f^p) = \text{Ker}(f^{p+1})$.
5) Montrer que $\forall n \geq p, \text{Ker}(f^n) = \text{Ker}(f^p)$ et $\text{Im}(f^n) = \text{Im}(f^p)$
6) On pose $p_0 = \min_{p \in \mathbb{N}} \{p \in \mathbb{N} \mid \text{Ker}(f^p) = \text{Ker}(f^{p+1})\}$:
• 6.a) Justifier l'existence de p_0 • 6.b) Si f est un isomorphisme, calculer p_0 .
• 6.c) Si f est un projecteur, calculer p_0 . • 6.d) Soit $f : (x, y, z) \rightarrow (x, x, x)$ calculer p_0 pour f
• 6.e) Pour f quelconque, montrer que $p_0 \geq n - \text{rg } f$

Exercice 10 : ★★ Soit E un espace vectoriel avec $\dim E = n$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ une application nilpotente d'indice n , c'est à dire :

- $\exists n \in \mathbb{N} \mid f^n = 0 \text{ et } f^{n-1} \neq 0$
1) Montrer que f n'est pas inversible.
2) Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $B = (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E
3) En déduire le rang de f . 4) Donner une base de $\text{Ker } f$. 5) Donner la matrice de f dans la base B .

Matrices

Exercice 11 : (en 1 minute ♡) Donner une base pour l'image et le noyau de A puis dire si la matrice est inversible ou non.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 12 : ★ Donner une base pour l'image et le noyau de A puis dire si la matrice est inversible..

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 5 & -15 & 10 \\ 25 & 20 & -5 \\ 10 & 10 & 5 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix}$

Exercice 13 : ★ - ★★ Calculer l'image et le noyau de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ puis dire si la matrice est inversible ou non. (On pourra noter $(e_1, \dots, e_n)$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$).

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 3) $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ 4) $J - I_n$

5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 3n+3 & \dots & 3n \\ \vdots & & & & \vdots \\ (n-1)n+1 & (n-1)n+2 & (n-1)n+3 & \dots & n^2 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (-1)^{n+1} & (-1)^{n+1} & \dots & (-1)^{n+1} & (-1)^{n+1} \end{pmatrix}$

Changement de base

Exercice 14 : ★ soit $f : (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$ et $g : (x, y) \mapsto (x + 2y, y)$

- 1) Donner la matrice de f et g dans la base canonique.
- 2) Calculer la matrice de f et g dans la base $B = ((1, 1), (1, -1))$.

Exercice 15 : ★ soit f une application linéaire telle que $\text{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ avec $B = ((1, 1, 1), (1, -1, 2), (1, 0, 1))$. Calculer $f(x, y, z)$, pour $x, y, z \in \mathbb{R}^3$

Exercice 16 : ★ Soit $f : (x, y, z, t) \mapsto (x + y, x - z, x + t, y + z + t)$ 1) Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$.

- 2) Montrer que $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^4$. 3) Calculer $\text{Mat}_B(f)$.

Exercice 17 : ★★ On pose $f : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, 2y + z, z)$

- 1) Montrer que $E = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid f(v) = v\}$ est un espace vectoriel.
- 2) Montrer que $\dim E = 2$ et trouver $B = (e_1, e_2)$ une base de E .
- 3) Montrer qu'il existe $\lambda \neq 1$ et $e_3 \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $f(e_3) = \lambda e_3$. On explicitera λ et e_3 .
- 4) Montrer que $B = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E .
- 5) Donner la matrice de f dans cette base. En déduire la matrice de f^n .
- 6) En déduire la matrice de f^n dans la base canonique.

Exercice 18 : ★★

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\text{Mat}_B(f)$ est la même pour toute base B de E . Montrer que $f = \lambda \text{id}_E$.