

Cahier de calcul

— pratique et entraînement —



La suite de Fibonacci, définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Elle apparaît sous de nombreuses formes biologiques, comme la ramification des arbres, la disposition des feuilles sur une tige, les fruits de l'ananas, la floraison de l'artichaut, le déroulement des feuilles de fougères, la disposition d'une pomme de pin, la coquille de l'escargot et la disposition des nuages lors des ouragans. Quant aux marguerites, elles ont le plus souvent un nombre de pétales issu de la suite de Fibonacci.

Ce cahier de calcul est une adaptation pour les classes de BCPST d'un travail réalisé initialement pour l'ensemble des classes préparatoires.

Coordination

Colas BARDAVID

Équipe des participants

Vincent BAYLE, Romain BASSON, Olivier BERTRAND, Ménard BOURGADE, Julien BUREAUX, Alain CAMANES, Mathieu CHARLOT, Mathilde COLIN DE VERDIÈRE, Keven COMMAULT, Miguel CONCY, Rémy EUPHERTE, Hélène GROS, Audrey HECHNER, Florian HECHNER, Marie HÉZARD, Nicolas LAILLET, Valérie LE BLANC, Thierry LIMOGES, Quang-Thai NGO, Xavier PELLEGRIN, Fabien PELLEGRINI, Jean-Louis POURTIER, Valérie ROBERT, Jean-Pierre TÉCOURT, Guillaume TOMASINI, Marc TENTI

Adaptation BCPST

Carine COURANT, Elodie MAILLET

Remerciements

Nous remercions vivement l'équipe coordonnée par Colas BARDAVID pour avoir mis à disposition les sources du cahier initial.

Le pictogramme 🕒 de l'horloge a été créé par Ralf SCHMITZER (The Noun Project).

L'illustration de la couverture vient de

<https://www.freeimg.net/photo/512455/fibonacci-geometry-mathematics-nautilus>

Sommaire

☐	1. Fractions.....	1
☐	2. Puissances.....	3
☐	3. Calcul littéral.....	4
☐	4. Racines carrées.....	6
☐	5. Équations du second degré.....	8
☐	6. Exponentielle et Logarithme.....	11
☐	7. Trigonométrie.....	14
☐	8. Dérivation.....	16
☐	9. Primitives.....	19
☐	10. Calcul d'intégrales.....	21
☐	11. Intégration par parties.....	23
☐	12. Changements de variable.....	25
☐	13. Intégration des fractions rationnelles.....	27
☐	14. Systèmes linéaires.....	30
☐	15. Nombres complexes.....	31
☐	16. Trigonométrie et nombres complexes.....	32
☐	17. Sommes et produits.....	34
☐	18. Coefficients binomiaux.....	37
☐	19. Manipulation des fonctions usuelles.....	39
☐	20. Suites numériques.....	41
☐	21. Inégalités.....	43
☐	22. Développements limités.....	45
☐	23. Calcul matriciel.....	47
☐	24. Équations différentielles.....	51
☐	25. Fonctions de deux variables.....	53
☐	26. Séries numériques.....	55
☐	27. Algèbre linéaire.....	57
☐	28. Réduction.....	59

Présentation et mode d'emploi

Qu'est-ce que ce cahier ?

Ce cahier est un cahier de calcul, basé sur le programme de mathématiques collège/lycée ainsi que sur le programme de première année de Post-Bac. Il ne se substitue en aucun cas aux TD donnés par votre professeur de maths mais est un outil pour vous aider à vous améliorer en calcul.

À quoi sert-il ?

En mathématiques, la technique et le calcul sont fondamentaux.

Sans technique, il est impossible de correctement appréhender une question mathématique. De même que l'on doit faire des gammes et beaucoup pratiquer lorsque l'on apprend un instrument, on doit calculer régulièrement lorsque l'on pratique les mathématiques, notamment en CPGE et dans les études Post-Bac.

Comment est-il organisé ?

Ce cahier comporte plusieurs parties :

- Un sommaire vous permettant d'avoir d'un seul coup d'œil les différentes fiches de ce cahier de calcul, et de noter celles que vous avez déjà faites ou pas.
- Une partie de **calculs élémentaires**, faisables dès le début de la première année, et centrée sur les calculs « de base » : développement, factorisation, racines carrées, fractions, *etc.* Cela peut vous paraître simple, mais sachez que ce type d'erreur de calcul est toujours fréquent, même en spé, même sur les copies de concours. Travailler les techniques élémentaires de calcul vous facilitera grandement la vie !
- Une partie liée au programme de première année : sont indiqués précisément les chapitres nécessaires pour pouvoir aborder chaque fiche de calculs.
- Enfin, quelques fiches portant sur le programme de deuxième année : les chapitres nécessaires sont clairement indiqués.
- Les réponses brutes ainsi que les corrigés détaillés sont dans un second cahier dédié, diffusé selon le choix de votre professeur.

Chaque fiche de calculs est organisée ainsi :

- Une présentation du thème de la fiche et des prérequis (notamment, pour des techniques propres à certaines filières, on précise de quelle filière il s'agit)
- Une liste de calculs, dont le temps de résolution (incluant la longueur et la technicité du calcul) est symbolisé par une (🕒🕒🕒🕒), deux (🕒🕒🕒), trois (🕒🕒🕒) ou quatre (🕒🕒🕒🕒) horloges.
- Vous êtes invité à écrire directement les réponses dans les cadres prévus à cet effet.

Comment l'utiliser ?

Un travail personnalisé.

Ce cahier de calcul est prévu pour être **utilisé en autonomie**.

Choisissez les calculs que vous faites en fonction des difficultés que vous rencontrez et des chapitres que vous étudiez, ou bien en fonction des conseils de votre professeur de mathématiques.

Pensez aussi à l'utiliser à l'issue d'un DS ou d'une colle, lorsque vous vous êtes rendu compte que certains points de calcul étaient mal maîtrisés.

Enfin, ne cherchez pas à faire linéairement ce cahier : les fiches ne sont pas à faire dans l'ordre, mais en fonction des points que vous souhaitez travailler.

Un travail régulier.

Essayez de pratiquer les calculs à un rythme régulier : **une quinzaine de minutes par jour** par exemple. Privilégiez un travail régulier sur le long terme plutôt qu'un objectif du type « faire 10 fiches par jour pendant les vacances » .

Point important : pour réussir à calculer, il faut répéter. C'est pour cela que nous avons mis plusieurs exemples illustrant chaque technique de calcul.

Il peut être utile de parfois refaire certains calculs : n'hésitez pas à cacher les réponses déjà écrites dans les cadres, ou à écrire vos réponses dans les cadres au crayon à papier.

Un travail efficace.

Attention à l'utilisation des réponses et des corrigés : il est important de chercher suffisamment par soi-même avant de regarder les réponses et/ou les corrigés. Il faut vraiment **faire les calculs** afin que le corrigé vous soit profitable.

N'hésitez pas à ne faire qu'en partie une feuille de calculs : il peut être utile de revenir plusieurs fois à une même feuille, afin de voir à quel point telle technique a bien été assimilée.

La progression

Avoir une solide technique de calcul s'acquiert sur le long terme, mais si vous étudiez sérieusement les fiches de ce cahier, vous verrez assez rapidement des progrès apparaître, en colle, en DS, *etc.* Une bonne connaissance du cours combinée à une plus grande aisance en calcul, c'est un très beau tremplin vers la réussite en prépa ou dans vos études !

Une erreur ? Une remarque ?

Si jamais vous voyez une erreur d'énoncé ou de corrigé, ou bien si vous avez une remarque à faire, n'hésitez pas à écrire à l'adresse `carine-marjorie.courant@ac-lyon.fr`.

Fractions

Prérequis

Règles de calcul sur les fractions.
Dès le début de 1ère année.

Calculs dans l'ensemble des rationnels

Calcul 1.1 — Simplification de fractions.



Simplifier les fractions suivantes (la lettre k désigne un entier naturel non nul).

a) $\frac{32}{40}$

c) $\frac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4}$

b) $8^3 \times \frac{1}{4^2}$

d) $\frac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}}$

Calcul 1.2 — Sommes, produits, quotients, puissances.



Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $\frac{2}{4} - \frac{1}{3}$

c) $\frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times 5$

b) $\frac{2}{3} - 0,2$

d) $-\frac{2}{15} \div (-\frac{6}{5})$

Calcul 1.3



Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $(2 \times 3 \times 5 \times 7)(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7})$

b) $(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{62}{10}) \times \frac{21}{24}$

c) $\frac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3}$

d) $\frac{1\,978 \times 1\,979 + 1\,980 \times 21 + 1958}{1\,980 \times 1\,979 - 1\,978 \times 1\,979}$

Calcul 1.4 — Un petit calcul.



Écrire $\frac{0,5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{0,5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0,2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3,5}$ sous forme d'une fraction irréductible.

Calcul 1.5 — Le calcul littéral à la rescousse.



En utilisant les identités remarquables et le calcul littéral, calculer les nombres suivants.

a) $\frac{2\,022}{(-2\,022)^2 + (-2\,021)(2\,023)}$

c) $\frac{1\,235 \times 2\,469 - 1\,234}{1\,234 \times 2\,469 + 1\,235}$

b) $\frac{2\,021^2}{2\,020^2 + 2\,022^2 - 2}$

d) $\frac{4\,002}{1\,000 \times 1\,002 - 999 \times 1\,001}$

Calcul 1.6 — Les fractions et le calcul littéral.



Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible.

- a) $\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
- b) $\frac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b}$ pour $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, distincts deux à deux.
- c) $\frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$ pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1, 2\}$

Calcul 1.7 — Le quotient de deux sommes de Gauss.



Simplifier $\frac{\sum_{k=0}^{n^2} k}{\sum_{k=0}^n k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la formule $1 + 2 + \dots + p = \frac{p(p+1)}{2}$

Calcul 1.8 — Décomposition en somme d'une partie entière et d'une partie décimale.



Soit $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Écrire les fractions suivantes sous la forme $a + \frac{b}{c}$ avec $b < c$.

- a) $\frac{29}{6}$ b) $\frac{k}{k-1}$... c) $\frac{3x-1}{x-2}$..

Calcul 1.9 — Un produit de fractions.



Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On donne $A = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t)^2}$ et $B = (1+t^2)(1+t)^2$.

Simplifier AB autant que possible.

Comparaison

Calcul 1.10 — Règles de comparaison.



Comparer les fractions suivantes avec le signe « > », « < » ou « = ».

- a) $\frac{3}{5} \dots \frac{5}{9}$ b) $\frac{12}{11} \dots \frac{10}{12}$ c) $\frac{125}{25} \dots \frac{105}{21}$

Calcul 1.11 — Produit en croix.



Les nombres $A = \frac{33\ 215}{66\ 317}$ et $B = \frac{104\ 348}{208\ 341}$ sont-ils égaux ? Oui ou non ?

Calcul 1.12 — Produit en croix.



On pose $A = \frac{100\ 001}{1\ 000\ 001}$ et $B = \frac{1\ 000\ 001}{10\ 000\ 001}$: a-t-on $A > B$, $A = B$ ou $A < B$?

Réponses mélangées

$$\begin{array}{cccccccccccc} \frac{-1}{n(n+1)^2} & -\frac{ab}{a-b} & 2 & 3 & \frac{12}{11} > \frac{10}{12} & \frac{1}{2} & 247 & \frac{n^3+n}{n+1} & 1\ 000 & \frac{1}{9} \\ 2t & 2\ 022 & \frac{-10}{3} & \frac{4}{5} & 3 + \frac{5}{x-2} & \frac{3}{2}n & \frac{203}{24} & \frac{7}{15} & \frac{1}{6} & \frac{3}{5} > \frac{5}{9} & 9 \\ 4 + \frac{5}{6} & A > B & 1 & \frac{16}{35} & 2^5 & -2 \times 3^{3k-2} & \text{Non} & 1 + \frac{1}{k-1} & \frac{125}{25} = \frac{105}{21} \end{array}$$

Puissances

Prérequis

Opérations sur les puissances (produits, quotients), décomposition en facteurs premiers, sommes d'expressions fractionnaires (même dénominateur), identités remarquables, factorisations et développements simples.

Dès le début de 1ère année

Calcul 2.1



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

a) $10^5 \cdot 10^3$	c) $\frac{10^5}{10^3}$	e) $\frac{(10^5 \cdot 10^{-3})^5}{(10^{-5} \cdot 10^3)^{-3}}$
b) $(10^5)^3$	d) $\frac{10^{-5}}{10^{-3}}$	f) $\frac{(10^3)^{-5} \cdot 10^5}{10^3 \cdot 10^{-5}}$

Calcul 2.2



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme sous la forme a^n avec a et n deux entiers relatifs.

a) $3^4 \cdot 5^4$	c) $\frac{2^5}{2^{-2}}$	e) $\frac{6^5}{2^5}$
b) $(5^3)^{-2}$	d) $(-7)^3 \cdot (-7)^{-5}$	f) $\frac{(30^4)^7}{2^{28} \cdot 5^{28}}$

Calcul 2.3



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme $2^n \cdot 3^p$, où n et p sont deux entiers relatifs.

a) $\frac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}}$	c) $\frac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}}$
b) $2^{21} + 2^{22}$	d) $\frac{(3^2 \cdot (-2)^4)^8}{((-3)^5 \cdot 2^3)^{-2}}$

Calcul 2.4



Dans chaque cas, simplifier au maximum.

a) $\frac{8^{17} \cdot 6^{-6}}{9^{-3} \cdot 2^{42}}$	c) $\frac{12^{-2} \cdot 15^4}{25^2 \cdot 18^{-4}}$
b) $\frac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4}$	d) $\frac{36^3 \cdot 70^5 \cdot 10^2}{14^3 \cdot 28^2 \cdot 15^6}$

Calcul 2.5



Dans chaque cas, simplifier au maximum l'expression en fonction du réel x .

a) $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x^2-1}$	c) $\frac{x^2}{x^2-x} + \frac{x^3}{x^3+x^2} - \frac{2x^2}{x^3-x}$
b) $\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{8}{x^2-4}$	d) $\frac{1}{x} + \frac{x+2}{x^2-4} + \frac{2}{x^2-2x}$

Réponses mélangées

$\frac{x}{x+1}$	15^4	$\frac{2x}{x+1}$	$2^{21} \cdot 3$	10^{15}	11	5^{-6}	$2^{38} \cdot 3^{26}$
10^2	10^8	10^{-2}	$2^{-4} \cdot 3^{-1}$	$2^6 \cdot 5$	3^5	$(-7)^{-2}$	
$\frac{2}{x-2}$	10^4	8	2^7	10^{-8}	3^{10}	$\frac{1}{x-2}$	3^{28} 2

Prérequis

Les identités remarquables !
Dès le début de 1ère année.

Développer, réduire et ordonner

Dans cette section, on tâchera de mener les calculs avec le minimum d'étapes. Idéalement, on écrira directement le résultat. La variable x représente un nombre réel (ou complexe).

Calcul 3.1



Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances décroissantes de x .

- | | | | |
|--|----------------------|---------------------------------|----------------------|
| a) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^3$ | <input type="text"/> | d) $(x+1)^2(x-1)(x^2+x+1)$ | <input type="text"/> |
| b) $(x-1)^3(x^2+x+1)$ | <input type="text"/> | e) $(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)$ | <input type="text"/> |
| c) $(x+1)^2(x-1)(x^2-x+1)$ | <input type="text"/> | f) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ | <input type="text"/> |

Calcul 3.2



Développer, réduire et ordonner les expressions polynomiales suivantes selon les puissances croissantes de x .

- | | |
|--|----------------------|
| a) $(x-2)^2(-x^2+3x-1) - (2x-1)(x^3+2)$ | <input type="text"/> |
| b) $(2x+3)(5x-8) - (2x-4)(5x-1)$ | <input type="text"/> |
| c) $\left((x+1)^2(x-1)(x^2-x+1)+1\right)x - x^6 - x^5 + 2$ | <input type="text"/> |
| d) $(x+1)(x-1)^2 - 2(x^2+x+1)$ | <input type="text"/> |
| e) $(x^2 + \sqrt{2}x + 1)\left(1 - \sqrt{2}x + x^2\right)$ | <input type="text"/> |
| f) $(x^2 + x + 1)^2$ | <input type="text"/> |

Factoriser

Calcul 3.3 — Petite mise en jambe.



Factoriser les expressions polynomiales de la variable réelle x suivantes.

- | | |
|---------------------------------------|----------------------|
| a) $-(6x+7)(6x-1) + 36x^2 - 49$ | <input type="text"/> |
| b) $25 - (10x+3)^2$ | <input type="text"/> |
| c) $(6x-8)(4x-5) + 36x^2 - 64$ | <input type="text"/> |
| d) $(-9x-8)(8x+8) + 64x^2 - 64$ | <input type="text"/> |

Calcul 3.4 — À l'aide de la forme canonique.



Factoriser les polynômes de degré deux suivants en utilisant leur forme canonique. On rappelle que la forme canonique de $ax^2 + bx + c$ est $a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$ (où $a \neq 0$).

- | | | | |
|-------------------------|----------------------|---------------------------|----------------------|
| a) $x^2 - 2x + 1$ | <input type="text"/> | d) $3x^2 + 7x + 1$ | <input type="text"/> |
| b) $x^2 + 4x + 4$ | <input type="text"/> | e) $2x^2 + 3x - 28$ | <input type="text"/> |
| c) $x^2 + 3x + 2$ | <input type="text"/> | f) $-5x^2 + 6x - 1$ | <input type="text"/> |

Calcul 3.5 — Avec plusieurs variables.



Factoriser sur $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

- | | | | |
|--------------------------------------|----------------------|--|----------------------|
| a) $(x + y)^2 - z^2$ | <input type="text"/> | d) $xy - x - y + 1$ | <input type="text"/> |
| b) $x^2 + 6xy + 9y^2 - 169x^2$ | <input type="text"/> | e) $x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy + x + y$.. | <input type="text"/> |
| c) $xy + x + y + 1$ | <input type="text"/> | f) $y^2(a^2 + b^2) + 16x^4(-a^2 - b^2)$.. | <input type="text"/> |

Calcul 3.6 — On passe au niveau supérieur.



Factoriser sur $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

- | | |
|---|----------------------|
| a) $x^4 - 1$ | <input type="text"/> |
| b) $(-9x^2 + 24)(8x^2 + 8) + 64x^4 - 64$ | <input type="text"/> |
| c) $x^4 + x^2 + 1$ | <input type="text"/> |
| d) $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ | <input type="text"/> |
| e) $(ap + bq + cr + ds)^2 + (aq - bp - cs + dr)^2 + (ar + bs - cp - dq)^2 + (as - br + cq - dp)^2$.. | <input type="text"/> |

Réponses mélangées

$$\begin{array}{llll}
 1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4 & (a^2 + b^2)(y - 4x^2)(y + 4x^2) & (x + 1)(x + 2) & \\
 2 - x + x^3 - x^4 - x^5 & x^5 - x^3 - x^2 + 1 & (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) & \\
 2\left(x + \frac{3 - \sqrt{233}}{4}\right)\left(x + \frac{3 + \sqrt{233}}{4}\right) & 2(3x - 4)(10x + 3) & 1 + x^4 & (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) \\
 (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2) & (x + y - z)(x + y + z) & 4(5x + 4)(-5x + 1) & \\
 -1 - 3x - 3x^2 + x^3 & x^4 + x^2 + 1 & (14x + 3y)(-12x + 3y) & (x + 1)(y + 1) \\
 x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1 & (x - 1)^2 & (x + y)(x + 1)^2 & -6(6x + 7) \\
 8x^3 - 6x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{8} & -5(x - 1)\left(x - \frac{1}{5}\right) & (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) & (x - 1)(y - 1) \quad (x + 2)^2 \\
 -2 + 12x - 17x^2 + 8x^3 - 3x^4 & x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1 & x^5 - x^3 + x^2 - 1 & -28 + 21x \\
 -8(x^2 + 1)(x - 4)(x + 4) & 3\left(x + \frac{7 - \sqrt{37}}{6}\right)\left(x + \frac{7 + \sqrt{37}}{6}\right) & -8(x + 1)(x + 16) &
 \end{array}$$

Racines carrées

Prérequis

Racines carrées. Méthode de la quantité conjuguée.
Dès le début de 1ère année.

Premiers calculs

Calcul 4.1 — Définition de la racine carrée.



Exprimer sans racine carrée les expressions suivantes.

- | | | | |
|------------------------------------|----------------------|------------------------------------|----------------------|
| a) $\sqrt{(-5)^2}$ | <input type="text"/> | d) $\sqrt{(2 - \sqrt{7})^2}$ | <input type="text"/> |
| b) $\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}$ | <input type="text"/> | e) $\sqrt{(3 - \pi)^2}$ | <input type="text"/> |
| c) $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$ | <input type="text"/> | f) $\sqrt{(3 - a)^2}$ | <input type="text"/> |

Calcul 4.2 — Transformation d'écriture.



Écrire aussi simplement que possible les expressions suivantes.

- | | | | |
|----------------------------------|----------------------|--|----------------------|
| a) $(2\sqrt{5})^2$ | <input type="text"/> | e) $(3 + \sqrt{7})^2 - (3 - \sqrt{7})^2$ | <input type="text"/> |
| b) $(2 + \sqrt{5})^2$ | <input type="text"/> | f) $\left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^4$ | <input type="text"/> |
| c) $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$ | <input type="text"/> | g) $\left(\frac{5 - \sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$ | <input type="text"/> |
| d) $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$ | <input type="text"/> | h) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$ | <input type="text"/> |

Avec la méthode de la quantité conjuguée

Calcul 4.3



Rendre rationnels les dénominateurs des expressions suivantes.

- | | | | |
|---|----------------------|--|----------------------|
| a) $\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{2}}$ | <input type="text"/> | e) $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$ | <input type="text"/> |
| b) $\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$ | <input type="text"/> | f) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$ | <input type="text"/> |
| c) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ | <input type="text"/> | g) $\frac{5 + 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{5 - 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$ | <input type="text"/> |
| d) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ | <input type="text"/> | h) $\left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}\right)^2$ | <input type="text"/> |

Calcul 4.4



Exprimer la quantité suivante sans racine carrée au dénominateur.

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} \dots\dots\dots \boxed{}$$

Calculs variés

Calcul 4.5 — Avec une variable.



On considère la fonction f qui à $x > 1$ associe $f(x) = \sqrt{x-1}$. Pour tout $x > 1$, calculer et simplifier les expressions suivantes.

a) $f(x) + \frac{1}{f(x)} \dots\dots\dots$	$\boxed{}$	d) $\frac{f'(x)}{f(x)} \dots\dots\dots$	$\boxed{}$
b) $\frac{f(x+2) - f(x)}{f(x+2) + f(x)} \dots\dots\dots$	$\boxed{}$	e) $f(x) + 4f''(x) \dots\dots\dots$	$\boxed{}$
c) $\sqrt{x+2f(x)} \dots\dots\dots$	$\boxed{}$	f) $\frac{f(x)}{f''(x)} \dots\dots\dots$	$\boxed{}$

Calcul 4.6 — Mettre au carré.



Élever les quantités suivantes au carré pour en donner une expression simplifiée.

a) $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}} \dots\dots\dots$	$\boxed{}$	b) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{3+2\sqrt{2}} \dots\dots\dots$	$\boxed{}$
--	----------------------------	--	----------------------------

Calcul 4.7 — Méli-mélo.



Donner une écriture simplifiée des réels suivants.

a) $\frac{3-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} \dots\dots\dots$	$\boxed{}$	d) $3e^{-\frac{1}{2}\ln 3} \dots\dots\dots$	$\boxed{}$
b) $\sqrt{3+2\sqrt{2}} \dots\dots\dots$	$\boxed{}$	e) $2\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \dots\dots\dots$	$\boxed{}$
c) $\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} \dots\dots\dots$	$\boxed{}$	f) $\frac{1}{2}\ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \dots\dots\dots$	$\boxed{}$

Calcul 4.8



Simplifier $\sqrt[3]{3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3+\sqrt{9+\frac{125}{27}}}$.

On commencera par exprimer A^3 en fonction de A . $\dots\dots\dots \boxed{}$

Réponses mélangées

$12\sqrt{7}$	$-4(x-1)^2$	$-(\sqrt{2}+\sqrt{3})$	$9-\frac{10}{3}\sqrt{2}$	20	$-\frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}$
$\sqrt{2}$	$1+\sqrt{5}$	$2\sqrt{2}$	$\frac{x}{\sqrt{x-1}}$	$ 3-a $	$50-25\sqrt{3}$
$\sqrt{3}-1$	$3+\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{6}$	5	$\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}$
$\frac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-2$	1	$2\sqrt{2}$	$9+4\sqrt{5}$
$\ln(1+\sqrt{2})$	$1+\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}+2$	$\pi-3$	12	$\sqrt{7}-2$
$1+\sqrt{2}$	$-11+5\sqrt{5}$	$x-\sqrt{x^2-1}$	10	$\frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}$	$3-2\sqrt{2}$
					$1-\sqrt{10}+\sqrt{15}$

Équations du second degré

Prérequis

Relations entre coefficients et racines.
Dès le début de 1ère année.

Dans cette fiche :

- tous les trinômes considérés sont réels ;
- on ne s'intéresse qu'à leurs éventuelles **racines réelles** ;
- tous les paramètres sont choisis de telle sorte que l'équation considérée soit bien de degré 2.

Les formules donnant explicitement les racines d'une équation du second degré en fonction du discriminant **ne servent nulle part** dans cette fiche d'exercices !

Recherche de racines

Calcul 5.1 — Des racines vraiment évidentes.



Résoudre mentalement les équations suivantes. *Les racines évidentes sont à chercher parmi 0, 1, -1, 2, -2 ainsi éventuellement que 3 et -3.*

- | | | | |
|------------------------------|----------------------|--------------------------------|----------------------|
| a) $x^2 - 6x + 9 = 0$ | <input type="text"/> | f) $2x^2 + 3x = 0$ | <input type="text"/> |
| b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$ | <input type="text"/> | g) $2x^2 + 3 = 0$ | <input type="text"/> |
| c) $x^2 + 4x - 12 = 0$ | <input type="text"/> | h) $x^2 + 4x - 5 = 0$ | <input type="text"/> |
| d) $x^2 - 5x + 6 = 0$ | <input type="text"/> | i) $3x^2 - 11x + 8 = 0$ | <input type="text"/> |
| e) $x^2 - 5x = 0$ | <input type="text"/> | j) $5x^2 + 24x + 19 = 0$ | <input type="text"/> |

Calcul 5.2 — Somme et produit.



Résoudre mentalement les équations suivantes.

- | | | | |
|-------------------------------|----------------------|--------------------------------------|----------------------|
| a) $x^2 - 13x + 42 = 0$ | <input type="text"/> | d) $x^2 - 8x - 33 = 0$ | <input type="text"/> |
| b) $x^2 + 8x + 15 = 0$ | <input type="text"/> | e) $x^2 - (a + b)x + ab = 0$ | <input type="text"/> |
| c) $x^2 + 18x + 77 = 0$ | <input type="text"/> | f) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ | <input type="text"/> |

Calcul 5.3 — L'une grâce à l'autre.



Calculer la seconde racine des équations suivantes.

- | | |
|---|----------------------|
| a) $3x^2 - 14x + 8 = 0$ sachant que $x = 4$ est racine | <input type="text"/> |
| b) $7x^2 + 23x + 6 = 0$ sachant que $x = -3$ est racine | <input type="text"/> |
| c) $mx^2 + (2m + 1)x + 2 = 0$ sachant que $x = -2$ est racine | <input type="text"/> |
| d) $(m + 3)x^2 - (m^2 + 5m)x + 2m^2 = 0$ sachant que $x = m$ est racine | <input type="text"/> |

Calcul 5.4 — Racine évidente.

Trouver une racine des équations suivantes et calculer l'autre en utilisant les relations entre les coefficients du trinôme et ses racines.

Seuls les deux derniers calculs ne se font pas de tête.

- a) $(b - c)x^2 + (c - a)x + (a - b) = 0$
- b) $a(b - c)x^2 + b(c - a)x + c(a - b) = 0$
- c) $(x + a)(x + b) = (m + a)(m + b)$
- d) $(b - c)x^2 + (c - a)mx + (a - b)m^2 = 0$
- e) $\frac{x}{a} + \frac{b}{x} = \frac{m}{a} + \frac{b}{m}$
- f) $\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

Recherche d'équations

Calcul 5.5 — À la recherche de l'équation.

En utilisant la somme et le produit des racines d'une équation du second degré, former l'équation du second degré admettant comme racines les nombres suivants.

- a) 9 et 13
- b) -11 et 17
- c) $2 + \sqrt{3}$ et $2 - \sqrt{3}$
- d) $m + \sqrt{m^2 - 3}$ et $m - \sqrt{m^2 - 3}$
- e) $m + 3$ et $\frac{2m - 5}{2}$
- f) $\frac{m + 1}{m}$ et $\frac{m - 2}{m}$

Calcul 5.6 — Avec le discriminant.

Déterminer la valeur à donner à m pour que les équations suivantes admettent une racine double, et préciser la valeur de la racine dans ce cas.

- a) $x^2 - (2m + 3)x + m^2 = 0$
- b) $(m + 2)x^2 - 2(m - 1)x + 4 = 0$
- c) $(m + 3)x^2 + 2(3m + 1)x + (m + 3) = 0$

Factorisations et signe

Calcul 5.7 — Factorisation à vue.



Déterminer de tête les valeurs des paramètres a et b pour que les égalités suivantes soient vraies pour tout x .

- a) $2x^2 + 7x + 6 = (x + 2)(ax + b)$
- b) $-4x^2 + 4x - 1 = (2x - 1)(ax + b)$
- c) $-3x^2 + 14x - 15 = (x - 3)(ax + b)$
- d) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 40 = (x - 5)(ax + b)$
- e) $x^2 + 2\sqrt{7}x - 21 = (x - \sqrt{7})(ax + b)$

Calcul 5.8 — Signe d'un trinôme.



Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles les expressions suivantes sont positives ou nulles.

- a) $x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2}$
- b) $-x^2 + 2x + 15$
- c) $(x + 1)(3x - 2)$
- d) $\frac{x - 4}{2x + 1}$

Réponses mélangées

$-1/m$ m donc $m(a - b)/(b - c)$ 0 , donc 5 $m = -1$ et $x = -2$, ou $m = 7$ et $x = 2/3$

$a = 1$ et $b = 3\sqrt{7}$ $-2/7$ $-3, -5$ $x^2 - 22x + 117 = 0$ $\emptyset$

$m^2x^2 + (m - 2m^2)x + (m^2 - m - 2) = 0$ $m = -3/4$ et $x = 3/4$ m donc $-(m + a + b)$

$a + b$ puis $2ab/(a + b)$. $] - \infty, -1] \cup [2/3, +\infty[$ 1 donc $(a - b)/(b - c)$ $2, 3$

1 donc $8/3$ a, b $6, 7$ $] - \infty, 1] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$ $3, 3$ 1 donc -5

$2x^2 - (4m + 1)x + (2m^2 + m - 15) = 0$ $] - \infty, -1/2[\cup [4, +\infty[$ $a = -3$ et $b = 5$

-1 donc $-19/5$ $a = 1/2$ et $b = 8$ 1 donc $c(a - b)/(a(b - c))$ $2/3$

$x^2 - 4x + 1 = 0$ 0 , donc $-3/2$ $a - b, a + b$ $m = 1$ et $x = -1$ ou $m = -1$ et $x = 1$

$a = 2$ et $b = 3$ m donc ab/m $2m/(m + 3)$ $x^2 - 6x - 187 = 0$ $-3, 11$

$-7, -11$ $[-3, 5]$ $-1/3, -1/3$ $2, -6$ $a = -2$ et $b = 1$ $x^2 - 2mx + 3 = 0$



Exponentielles

Calcul 6.5



Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $e^{3 \ln 2}$

d) $e^{-2 \ln 3}$

b) $\ln(\sqrt{e})$

e) $\ln(e^{-\frac{1}{2}})$

c) $\ln(e^{\frac{1}{3}})$

f) $e^{\ln 3 - \ln 2}$

Calcul 6.6



Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $-e^{-\ln \frac{1}{2}}$

d) $\ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2})$

b) $e^{-\ln \ln 2}$

e) $\ln(\sqrt{\exp(-\ln e^2)})$

c) $\ln\left(\frac{1}{e^{17}}\right)$

f) $\exp\left(-\frac{1}{3} \ln(e^{-3})\right)$

Études de fonctions

Calcul 6.7 — Parité.



Étudier la parité des fonctions suivantes.

a) $f_1 : x \mapsto \ln \frac{2021 + x}{2021 - x}$

b) $f_2 : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

c) $f_3 : x \mapsto \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

d) $f_4 : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Calcul 6.8 — Étude d'une fonction.



Soit $f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

a) Préciser l'ensemble de définition de cette fonction.

b) Montrer que pour tous réels a et b on a $f(a + b) = \frac{f(a) + f(b)}{1 + f(a)f(b)}$

c) Déterminer la limite de f en $+\infty$

d) Déterminer la limite de f en $-\infty$

Calcul 6.9



On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(1+x) \end{cases}$$

Calculer et simplifier les expressions suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$ pour lequel elles sont définies.

- | | | | |
|------------------------------------|----------------------|-------------------------------------|----------------------|
| a) $f(2e^x - 1)$ | <input type="text"/> | d) $xf'(x) - 1$ | <input type="text"/> |
| b) $e^{x - \frac{1}{2}f(x)}$ | <input type="text"/> | e) $e^{\frac{f(x)}{f'(x-1)}}$ | <input type="text"/> |
| c) $\frac{1}{2}f(x^2 - 2x)$ | <input type="text"/> | | |

Équations, inéquations

Calcul 6.10



Résoudre les équations ou inéquations suivantes.

- | | |
|---|----------------------|
| a) $e^{3x-5} \geq 12$ | <input type="text"/> |
| b) $1 \leq e^{-x^2+x}$ | <input type="text"/> |
| c) $e^{1+\ln x} \geq 2$ | <input type="text"/> |
| d) $e^{-6x} \leq \sqrt{e}$ | <input type="text"/> |
| e) $\ln(-x-5) = \ln(x-61) - \ln(x+7)$ | <input type="text"/> |
| f) $\ln(-x-5) = \ln \frac{x-61}{x+7}$ | <input type="text"/> |

Réponses mélangées

$x \in [0, 1]$	$2 \ln 5 - 2 \ln 2$	$\frac{1}{2} \ln 2$	$\frac{25}{8} \ln(\sqrt{2} - 1)$	$-2 \ln 5 + 4 \ln 2$	1				
impaire	$\frac{1}{9}$	ok	$\ln 3 + 11 \ln 2$	$3 \ln 2$	$\emptyset$	$x + \ln 2$	0	$-\frac{1}{2}$	-2
$17 + 12\sqrt{2}$	$\frac{-13 - \sqrt{273}}{2}$	$\frac{e^x}{\sqrt{1+x}}$	$-3 \ln 2$	$-\ln 3 - 2 \ln 2$			$4 \ln 2$	$\frac{1}{\ln 2}$	
$x \geqslant -\frac{1}{12}$	$\ln x - 1 $	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{2}$	8	0	impaire	$-\frac{1}{1+x}$	$3 \ln 5 + 2 \ln 2$	
1	$x \geqslant \frac{\ln 12 + 5}{3}$	$\frac{1}{2}$	$e^{x \ln(1+x)}$	impaire	-1	$9 \ln 2$	e	impaire	
-1	$\mathbb{R}$	$-2 \ln 2 - 2 \ln 5$	$2 \ln 2 + 2 \ln 3$	$2 \ln 3 - 2 \ln 2$	$x \geqslant \frac{2}{e}$			-17	

Trigonométrie

Prérequis

Cercle trigonométrique. Relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Symétrie et périodicité de sin et cos. Fonction tangente.
Dès le début de 1ère année.

Dans toute cette fiche, x désigne une quantité réelle.

Valeurs remarquables de cosinus et sinus

Calcul 7.1



Donner les valeurs :

a) $\cos \frac{3\pi}{4}$

b) $\sin \frac{\pi}{6}$

c) $\tan \frac{\pi}{4}$

d) $\tan \frac{5\pi}{4}$

e) $\cos 7\pi$

f) $\sin 3\pi$

g) $\cos \frac{\pi}{6}$

h) $\sin \frac{7\pi}{6}$

Calcul 7.2



Simplifier :

a) $\cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{7\pi}{4}$.

b) $\sin \frac{5\pi}{6} + \sin \frac{7\pi}{6}$

c) $\tan \frac{2\pi}{3} + \tan \frac{3\pi}{4} + \tan \frac{5\pi}{6} + \tan \frac{7\pi}{6}$

d) $\cos^2 \frac{4\pi}{3} + \sin^2 \frac{4\pi}{3}$

Signe du cosinus et du sinus

Calcul 7.3



Donner le signe :

a) $\cos \frac{2\pi}{5}$

b) $\sin \frac{7\pi}{5}$

c) $\cos \frac{8\pi}{5}$

d) $\tan \frac{13\pi}{5}$

e) $\sin \frac{14\pi}{5}$

f) $\tan -\frac{3\pi}{5}$

Propriétés remarquables de cosinus et sinus

Calcul 7.4



Simplifier :

a) $\sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \dots\dots\dots$

b) $\sin(-x) + \cos(\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \dots\dots\dots$

c) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \dots\dots\dots$

d) $\cos(x - \pi) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) \dots\dots\dots$

Équations trigonométriques

Calcul 7.5



Résoudre dans $[0, 2\pi]$, dans $[-\pi, \pi]$, puis dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\cos x = \frac{1}{2} \dots\dots\dots$

b) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \dots\dots\dots$

c) $\sin x = \cos \frac{2\pi}{3} \dots\dots\dots$

d) $\tan x = -1 \dots\dots\dots$

e) $\cos^2 x = \frac{1}{2} \dots\dots\dots$

f) $|\tan x| = \frac{1}{\sqrt{3}} \dots\dots\dots$

g) $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \dots\dots\dots$

h) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \dots\dots\dots$

i) $\cos x = \cos \frac{\pi}{7} \dots\dots\dots$

j) $\sin x = \cos \frac{\pi}{7} \dots\dots\dots$

Inéquations trigonométriques

Calcul 7.6



Résoudre dans $[0, 2\pi]$, puis dans $[-\pi, \pi]$, les inéquations suivantes :

a) $\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2} \dots\dots\dots$

b) $\cos x \leq \cos \frac{\pi}{3} \dots\dots\dots$

c) $\sin x \leq \frac{1}{2} \dots\dots\dots$

d) $|\sin x| \leq \frac{1}{2} \dots\dots\dots$

e) $\tan x \geq 1 \dots\dots\dots$

f) $|\tan x| \geq 1 \dots\dots\dots$

g) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \dots\dots\dots$

h) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \dots\dots\dots$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{l}
 -1 < 0 \quad \left\{ \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \left\{ -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\} \\
 \left\{ \frac{\pi}{7} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{7} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \right\} \quad \left\{ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \\
 \left\{ \frac{5\pi}{14} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{9\pi}{14} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad -1 - \sqrt{3} \quad \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right] \quad \left[-\pi, -\frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi \right] \\
 \left[-\pi, \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi \right] > 0 \quad \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right] \quad \left\{ \frac{\pi}{7}, \frac{13\pi}{7} \right\} \quad \left\{ -\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7} \right\} \quad \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{23\pi}{12} \right\} \\
 -2 \cos x > 0 \quad \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{11\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \left\{ -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right\} \quad 0 < 0 \\
 \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \left\{ -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right\} \quad \left\{ \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\} \quad \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\} \\
 \left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \quad \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \left\{ -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} \right\} \quad \left\{ \frac{-2\pi}{3}, \frac{-\pi}{3} \right\} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
 \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right] \quad \left[0, \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi \right] \quad \left\{ \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\} \quad \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\} \quad 1 \quad \left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\} \\
 -\sin x \quad \left[0, \frac{3\pi}{8} \right] \cup \left[\frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8} \right] \cup \left[\frac{15\pi}{8}, 2\pi \right] \quad \left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2} \right] \cup \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right] \quad \frac{1}{2} \\
 \left[-\pi, -\frac{5\pi}{6} \right] \cup \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi \right] < 0 \quad 1 \quad \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4} \right] \\
 \left\{ -\frac{11\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12} \right\} \quad \left[-\pi, -\frac{5\pi}{8} \right] \cup \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8} \right] \cup \left[\frac{7\pi}{8}, \pi \right] \quad 2 \cos x \\
 \left[0, \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi \right] \quad 0 \quad \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right] \quad \left[0, \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi \right] \\
 \left\{ \frac{5\pi}{14}, \frac{9\pi}{14} \right\} \quad 0 \quad 1 \quad \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \left[0, \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi \right] \\
 0 \quad -\frac{1}{2} \quad \left\{ \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} > 0 \quad \left\{ -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\} \\
 \left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\} \quad \left\{ \frac{5\pi}{14}, \frac{9\pi}{14} \right\} \quad \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\} \quad \left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}
 \end{array}$$

Dérivation

Prérequis

Dérivées des fonctions usuelles. Formules de dérivation.

Dès le début de 1ère année, sauf pour les composées : après le cours de 1ère année.

Application des formules usuelles

Calcul 8.1 — Avec des produits.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 + 3x + 2)(2x - 5)$

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^3 + 3x + 2)(x^2 - 5)$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 2x + 6) \exp(2x)$

d) $x \in]2, +\infty[$ et $f(x) = (3x^2 - x) \ln(x - 2)$

Calcul 8.2 — Avec des puissances.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 5x)^5$

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2x^3 + 4x - 1)^2$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (\sin(x) + 2 \cos(x))^2$

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (3 \cos(x) - \sin(x))^3$

Calcul 8.3 — Avec des fonctions composées.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

b) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(\ln(x))$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2 - x) \exp(x^2 + x)$

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \exp(3 \sin(2x))$

Calcul 8.4 — Avec des fonctions composées — bis.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \sin\left(\frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \cos\left(\frac{2x + 1}{x^2 + 4}\right)$

c) $x \in]0, \pi[$ et $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$

d) $x \in]0, +\infty[$ et $f(x) = \sin(\sqrt{x})$

Calcul 8.5 — Avec des quotients.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{2 \sin(x) + 3}$

b) $x \in]0, +\infty[$ et $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{3x + 2}$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{\cos(2x + 1)}{x^2 + 1}$

d) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{\ln(x)}$

Opérations et fonctions composées

Calcul 8.6



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

b) $x \in]-3, 3[$ et $f(x) = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$

c) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)$

d) $x \in]0, \pi[$ et $f(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

Dériver pour étudier une fonction

Calcul 8.7



Calculer $f'(x)$ et écrire le résultat sous forme factorisée.

a) $x \in \mathbb{R} \setminus 3, -2$ et $f(x) = \frac{1}{3-x} + \frac{1}{2+x}$

b) $x \in]-1, +\infty[$ et $f(x) = x^2 - \ln(x+1)$

c) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(x^2 + x - 2) - \frac{x+2}{x-1}$

d) $x \in]-1, +\infty[$ et $f(x) = \frac{x}{x+1} + x - 2\ln(x+1)$

e) $x \in]0, e[\cup]e, +\infty[$ et $f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{1 - \ln(x)}$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{llll} \frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}} & -3(3\cos(x) - \sin(x))^2(3\sin(x) + \cos(x)) & \frac{2x^2 + 2x + 5}{(x+2)(x-1)^2} & \frac{x^2}{(x+1)^2} \\ 6x^2 + 2x - 11 & -2 \frac{(x^2 + 1)\sin(2x+1) + x\cos(2x+1)}{(x^2 + 1)^2} & \frac{1}{x\ln(x)} & \frac{2}{x(1 - \ln(x))^2} \\ \frac{2}{x+1} \left(x + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) \left(x + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) & 5(x^2 - 5x)^4(2x - 5) & \frac{(4x+3)\ln(x) - 2x - 3}{(\ln(x))^2} & \\ \frac{6x}{(x^2 + 1)^2} \cos\left(\frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}\right) & \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} & 4(2x^3 + 4x - 1)(3x^2 + 2) & \frac{10x - 5}{(3-x)^2(2+x)^2} \\ (6x - 1)\ln(x - 2) + \frac{3x^2 - x}{x - 2} & 6\cos(2x)\exp(3\sin(2x)) & \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x\sin(x)} & \frac{2x}{x^2 + 1} \\ 8\cos^2(x) - 6\cos(x)\sin(x) - 4 & \frac{(2x+3)(2\sin(x)+3) - (x^2+3x) \times 2\cos(x)}{(2\sin(x)+3)^2} & \frac{2-3x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2} & \\ 5x^4 - 6x^2 + 4x - 15 & \frac{9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}} & \frac{1}{1-x^2} & (2x^2 - 2x + 10)\exp(2x) \\ 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & (-2x^2 + 3x - 1)\exp(x^2 + x) & \frac{2x^2 + 2x - 8}{(x^2 + 4)^2} \sin\left(\frac{2x+1}{x^2+4}\right) & \end{array}$$

Primitives

Prérequis

Intégration de Terminale. Dérivée d'une fonction composée.
Trigonométrie directe et réciproque. Trigonométrie hyperbolique.
Dès le début de 1ère année.

Pour chaque fonction à intégrer on pourra commencer par chercher les domaines où elle admet des primitives.

Calculs directs

Calcul 9.1



Déterminer directement une primitive des expressions suivantes.

a) $\frac{1}{t+1}$

d) $\sin(4t)$

b) $\frac{3}{(t+2)^2}$

e) $\sqrt{1+t} - \sqrt[3]{t}$

c) $\frac{3}{(t+2)^3}$

f) e^{2t+1}

Utilisation des formulaires

Calcul 9.2 — Dérivée d'une fonction composée.



Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

a) $\frac{2t^2}{1+t^3}$

d) $\frac{7t}{\sqrt[3]{1+7t^2}}$

b) $t\sqrt{1+2t^2}$

e) $\frac{t}{1+3t^2}$

c) $\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$

f) $\frac{12t}{(1+3t^2)^3}$

Calcul 9.3 — Dérivée d'une fonction composée — bis.



Même exercice.

a) $\frac{\ln^3 t}{t}$

d) $\frac{1}{t^2\sqrt{t}}$

b) $\frac{1}{t\sqrt{\ln t}}$

e) $\frac{e^t + e^{-t}}{1 - e^{-t} + e^t}$

c) $\frac{8e^{2t}}{(3 - e^{2t})^3}$

f) $\frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}$

Calcul 9.4 — Trigonométrie.



Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

- | | | | | | |
|---|----------------------|--|----------------------|---|----------------------|
| a) $\cos^2 t \sin t \dots\dots$ | <input type="text"/> | f) $\tan^2 t \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | j) $\frac{1 + \tan^2 t}{\tan^2 t} \dots\dots$ | <input type="text"/> |
| b) $\cos(t)e^{\sin t} \dots\dots$ | <input type="text"/> | g) $\tan^3 t \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | k) $\frac{\cos t}{(1 - \sin t)^3} \dots\dots$ | <input type="text"/> |
| c) $\tan t \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | h) $\frac{\tan^3 t}{\cos^2 t} \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | l) $\frac{1}{1 + 4t^2} \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |
| d) $\frac{\cos t}{1 - \sin t} \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | i) $\frac{1}{\cos^2(t)\sqrt{\tan t}} \dots\dots$ | <input type="text"/> | m) $\frac{e^t}{1 + e^{2t}} \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |
| e) $\frac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t}} \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | | | | |

Dériver puis intégrer, intégrer puis dériver

Calcul 9.5



Pour chacune des expressions suivantes :

- dériver puis factoriser l'expression ;
- intégrer l'expression.

- | | | | |
|--|----------------------|--|----------------------|
| a) $t^2 - 2t + 5 \dots\dots$ | <input type="text"/> | i) $\frac{e^t}{2 + e^t} \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |
| b) $\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | j) $\frac{e^t}{1 + e^{2t}} \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |
| c) $\sqrt{t} - \frac{1}{t^3} \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | k) $\frac{\sin t}{2 + 3 \cos t} \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |
| d) $\frac{1}{t^4} + \frac{1}{t\sqrt{t}} \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | l) $\frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |
| e) $e^{2t} + e^{-3t} \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | m) $te^{-t^2} \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |
| f) $e^{3t-2} \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | n) $\frac{1 - \ln t}{t} \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |
| g) $\sin(t) \cos^2(t) \dots\dots$ | <input type="text"/> | o) $\frac{1}{t \ln t} \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |
| h) $\frac{1}{t^2} \sin \frac{1}{t} \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> | p) $\frac{\sin(\ln t)}{t} \dots\dots\dots$ | <input type="text"/> |

Réponses mélangées

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{1}{(1 - \sin t)^2} \quad \cos t(3 \cos^2 t - 2) \text{ puis } -\frac{1}{3} \cos^3 t \quad \frac{1}{2} \tan^2 t + \ln |\cos t| \quad -\frac{3}{t+2} \quad -\ln |1 - \sin t| \\
 & -\frac{2}{3t^{\frac{3}{2}}} \quad \frac{1}{(1-t^2)^{3/2}} \text{ puis } -\sqrt{1-t^2} \quad -\frac{\cos(4t)}{4} \quad 2e^{2t} - 3e^{-3t} \text{ puis } \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-3t} \\
 & 2(t-1) \text{ puis } \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 5t \quad -\sqrt{1-t^2} \quad -\frac{4}{t^5} - \frac{3}{2} \frac{1}{t^{5/2}} \text{ puis } -\frac{1}{3} \frac{1}{t^3} - \frac{2}{\sqrt{t}} \quad \frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}} \\
 & \tan t - t \quad 3e^{3t-2} \text{ puis } \frac{1}{3}e^{3t-2} \quad 2\sqrt{\tan t} \quad -\frac{1}{\tan t} \quad \frac{1}{4} \tan^4 t \quad \ln |1 - e^{-t} + e^t| \\
 & -2 \cos \sqrt{t} \quad \frac{2e^t}{(2+e^t)^2} \text{ puis } \ln(2+e^t) \quad \frac{2 \cos t + 3}{(2+3 \cos t)^2} \text{ puis } -\frac{1}{3} \ln |2+3 \cos t| \\
 & -\frac{3}{2(t+2)^2} \quad \frac{1}{2} \operatorname{Arctan}(2t) \quad \frac{e^t(1-e^{2t})}{(2+e^t)^2} \text{ puis } \arctan(e^t) \quad \frac{3}{4}(1+7t^2)^{\frac{2}{3}} \\
 & -e^{\frac{1}{t}} \quad \frac{2}{(3-e^{2t})^2} \quad \frac{1}{4} \ln^4 t \quad \operatorname{Arctan}(e^t) \quad \frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{3}{t^4} \text{ puis } \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2t^2} \\
 & \frac{1}{6}(1+2t^2)^{\frac{3}{2}} \quad -\ln |\cos t| \quad -\frac{1}{(1+3t^2)^2} \quad -\frac{1+\ln t}{t^2 \ln^2 t} \text{ puis } \ln |\ln t| \\
 & \frac{1}{6} \ln(1+3t^2) \quad e^{\sin t} \quad \frac{2}{3} \ln |1+t^3| \quad 2\sqrt{\ln t} \quad \frac{\cos \ln t - \sin \ln t}{t^2} \text{ puis } -\cos(\ln t) \\
 & -\frac{1}{3} \cos^3 t \quad \frac{\ln t - 2}{t^2} \text{ puis } \ln t - \frac{1}{2} \ln^2 t \quad (1-2t^2)e^{-t^2} \text{ puis } -\frac{1}{2}e^{-t^2} \\
 & -\frac{2t \sin \frac{1}{t} + \cos \frac{1}{t}}{t^4} \text{ puis } \cos \frac{1}{t} \quad \frac{1}{2}e^{2t+1} \quad -\frac{1}{t^2} \left(\frac{2}{t} + 1 \right) \text{ puis } -\frac{1}{t} + \ln |t| \quad \ln |t+1|
 \end{aligned}$$

Calcul d'intégrales

Prérequis

Primitives usuelles, composées simples.
Dès le début de 1ère année, et après le cours de 1ère année.

Intégrales et aires algébriques

On rappelle que $\int_a^b f(x) dx$ est l'aire algébrique entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses du repère lorsque les bornes sont dans le sens croissant.

Calcul 10.1



Sans chercher à calculer les intégrales suivantes, donner leur signe.

a) $\int_{-2}^3 x^2 + e^x dx$. b) $\int_5^{-3} |\sin 7x| dx$ c) $\int_0^{-1} \sin x dx$...

Calcul 10.2



En se ramenant à des aires, calculer de tête les intégrales suivantes.

a) $\int_1^3 7 dx$ c) $\int_0^7 3x dx$ e) $\int_{-2}^2 \sin x dx$
b) $\int_7^{-3} -5 dx$ d) $\int_2^8 1 - 2x dx$.. f) $\int_{-2}^1 |x| dx$

Calcul d'intégrales

On rappelle que si F est une primitive de f alors $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, que l'on note $[F(x)]_a^b$.

Calcul 10.3 — Polynômes.



Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-1}^3 2 dx$ d) $\int_{-1}^1 3x^5 - 5x^3 dx$
b) $\int_1^3 2x - 5 dx$ e) $\int_0^1 x^5 - x^4 dx$
c) $\int_{-2}^0 x^2 + x + 1 dx$ f) $\int_1^{-1} x^{100} dx$

Calcul 10.4 — Fonctions usuelles.



Calculer.

a) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin x dx$... c) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$ e) $\int_{-3}^2 e^x dx$
b) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx$... d) $\int_1^{100} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$... f) $\int_{-3}^{-1} \frac{dx}{x}$

Calcul 10.5 — De la forme $f(ax + b)$.



Calculer les intégrales suivantes.

- | | | | |
|--|----------------------|--|----------------------|
| a) $\int_{-1}^2 (2x+1)^3 dx$ | <input type="text"/> | d) $\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x) dx$ | <input type="text"/> |
| b) $\int_{-2}^4 e^{\frac{1}{2}x+1} dx$ | <input type="text"/> | e) $\int_0^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx$ | <input type="text"/> |
| c) $\int_0^1 \frac{dx}{\pi x+2}$ | <input type="text"/> | f) $\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right) dx$ | <input type="text"/> |

Calcul 10.6 — Fonctions composées.



Calculer les intégrales suivantes.

- | | | | |
|---|----------------------|---|----------------------|
| a) $\int_1^3 \frac{x-2}{x^2-4x+5} dx$ | <input type="text"/> | d) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x (\cos x)^5 dx$ | <input type="text"/> |
| b) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x \sin(x^2+1) dx$ | <input type="text"/> | e) $\int_0^1 x e^{x^2-1} dx$ | <input type="text"/> |
| c) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan x dx$ | <input type="text"/> | f) $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^4} dx$ | <input type="text"/> |

Calcul 10.7 — Divers.



Calculer les intégrales suivantes.

- | | | | |
|--|----------------------|---|----------------------|
| a) $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+1} dx$ | <input type="text"/> | d) $\int_1^e \frac{3x-2\ln x}{x} dx$ | <input type="text"/> |
| b) $\int_{-2}^3 x+1 dx$ | <input type="text"/> | e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) \sin(x) dx$ | <input type="text"/> |
| c) $\int_{-1}^2 \max(1, e^x) dx$ | <input type="text"/> | f) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x \sin x dx$ | <input type="text"/> |

Calcul 10.8 — Avec les nouvelles fonctions de référence.



- | | | | |
|---|----------------------|--|----------------------|
| a) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{Arctan} x dx$ | <input type="text"/> | d) $\int_0^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx$ | <input type="text"/> |
| b) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ | <input type="text"/> | e) $\int_0^1 \sqrt{x} dx$ | <input type="text"/> |
| c) $\int_0^2 10^x dx$ | <input type="text"/> | f) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2}{1+9x^2} dx$ | <input type="text"/> |

Réponses mélangées

0	$e^2 - e^{-3}$	$\frac{\sqrt{2}}{6}$	-54	$-\frac{1}{3}$	Négatif	$\frac{e - \frac{1}{e}}{2}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$
0	$\frac{8}{3}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{e+1}$	$2(e^3 - 1)$	$\frac{99}{\ln 10}$	6	$-\ln 3$	8	50	1
$\frac{\pi}{4}$	$\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$	$\frac{1}{384}$	$3e - 4$	$\frac{1}{\pi} \ln\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{7}{48}$	0	0	$\frac{147}{2}$	18	0
$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{2}$	Positif	0	14	Positif	-2	78	e^2	$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$	$\frac{17}{2}$

Intégration par parties

Prérequis

Primitives, dérivées, intégration par parties.
A la suite du cours de 1ère année.

On rappelle le théorème d'intégration par parties. Si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, si $u \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ et si $v \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$, alors

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = \left[u(t)v(t) \right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt.$$

Intégrales

Calcul 11.1



Calculer :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t dt$

g) $\int_0^1 \ln(1+t^2) dt$

b) $\int_0^1 (2t+3)\sin(2t) dt$

h) $\int_0^1 t \arctan t dt$

c) $\int_0^2 t e^{\frac{t}{2}} dt$

i) $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t}} dt$

d) $\int_1^{\ln 2} t 2^t dt$

j) $\int_0^1 t \sqrt{1+t} dt$

e) $\int_1^e \ln t dt$

k) $\int_0^1 \sqrt{1+t} \ln(1+t) dt$

f) $\int_1^2 t \ln t dt$

l) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} t \tan^2 t dt$

Primitives

Calcul 11.2



Pour chaque fonction suivante, préciser sur quel ensemble elle est définie, puis en déterminer une primitive.

a) $x \mapsto (-x+1)e^x$

c) $x \mapsto \arctan(x)$

b) $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$

d) $x \mapsto x \cos(x)$

Intégrations par parties successives

Pour ces calculs de primitives et d'intégrales, on pourra réaliser plusieurs intégrations par parties successives.

Calcul 11.3 — Calcul d'intégrales.



a) $\int_0^1 (t^2 + 3t - 4)e^{2t} dt \dots\dots\dots$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \sin t dt \dots\dots\dots$

Calcul 11.4 — Calcul de primitives.



Calculer des primitives des fonctions suivantes.

a) $x \mapsto x^2 \sin(x) \dots\dots\dots$

c) $x \mapsto (x \ln x)^2 \dots\dots\dots$

b) $x \mapsto \ln^2 x \dots\dots\dots$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{ll} \frac{5}{2} - e^2 & \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{1 + \ln x}{x} \end{array} \right. \quad -\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{4}{3} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -x^2 \cos(x) + 2x \sin(x) + 2 \cos(x) - 2 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (-x + 2)e^x \end{array} \right. & \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{16\sqrt{2}}{15} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \sin(x) + \cos(x) \end{array} \right. & 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x \end{array} \right. \\ \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} & \frac{\pi}{2} - 1 \quad -\frac{5}{2} \cos(2) - \frac{1}{2} \sin(2) + \frac{3}{2} \quad \frac{4}{3} \sqrt{2} \ln(2) - \frac{8}{9} \sqrt{2} + \frac{7}{9} \\ \frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2} & \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \left(\frac{1}{3} \ln^2 x - \frac{2}{9} \ln x + \frac{2}{27} \right) \end{array} \right. \quad 4 \quad 2 \ln 2 - \frac{3}{4} \\ \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi^2}{32} \quad \frac{(\ln(2))^2 2^{\ln(2)} - 2 \ln(2) - 2^{\ln(2)} + 2}{(\ln(2))^2} \end{array}$$

Changements de variable

Prérequis

Primitives, dérivées. Changements de variables. Intégration par parties.
A la suite du cours de 1ère année.

Changements de variable

Calcul 12.1



Effectuer le changement de variable indiqué et en déduire la valeur de l'intégrale.

- | | | |
|--|------------------------------|-------------|
| a) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt$ | avec $t = \sin \theta$ | <div></div> |
| b) $\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}} dt$ | avec $u = \sqrt{t}$ | <div></div> |
| c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos t} dt$ | avec $u = \sin t$ | <div></div> |
| d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos t dt$ | avec $u = \sin t$ | <div></div> |
| e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos^3 t dt$ | avec $u = \sin t$ | <div></div> |
| f) $\int_1^4 \frac{1}{t + \sqrt{t}} dt$ | avec $u = \sqrt{t}$ | <div></div> |

Calcul 12.2



Même exercice.

- | | | |
|---|----------------------------------|-------------|
| a) $\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{3 + \cos^2 t} dt$ | avec $u = \cos t$ | <div></div> |
| b) $\int_0^1 \frac{1}{2 + e^{-t}} dt$ | avec $u = e^t$ | <div></div> |
| c) $\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{4t - t^2}} dt$ | avec $u = \frac{t}{2} - 1$ | <div></div> |
| d) $\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2} dt$ | avec $t = \tan u$ | <div></div> |
| e) $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}} dt$ | avec $u = \frac{1}{t}$ | <div></div> |
| f) $\int_e^{e^2} \frac{\ln t}{t + t \ln^2 t} dt$ | avec $u = \ln t$ | <div></div> |

Changements de variable et intégrations par parties

Calcul 12.3



Effectuer le changement de variable indiqué, continuer avec une intégration par parties et en déduire la valeur de l'intégrale.

a) $\int_1^4 e^{\sqrt{t}} dt$ avec $u = \sqrt{t}$

b) $\int_3^4 \frac{\ln(\sqrt{t}-1)}{\sqrt{t}} dt$ avec $u = \sqrt{t}$

Calculs de primitives par changement de variable

Calcul 12.4



Déterminer une primitive de f en utilisant le changement de variable donné.

a) $x \in]0, \frac{\pi}{2}[\mapsto \frac{\cos x + \sin x}{\sin x \cos^2 x}$ avec $u = \tan x$

b) $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}$ avec $u = \sqrt{e^x - 1}$

c) $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x + \sqrt[3]{x}}$ avec $u = \sqrt[3]{x}$

d) $x > 1 \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$ avec $u = \sqrt{x^2 - 1}$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2} & \ln(\sqrt{2} + 1) & \frac{1}{4} & \frac{\pi}{3\sqrt{3}} & \frac{1}{12} & \frac{\pi}{6} & \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{3}{2} \ln(x^{\frac{2}{3}} + 1) \end{array} \right. \\ -2((\sqrt{3} - 1) \ln(\sqrt{3} - 1) - 4 + 2\sqrt{3}) & \frac{\pi}{2} & 2e^2 & \frac{\pi}{12} & & & \\ \left\{ \begin{array}{l}]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \arctan \sqrt{x^2 - 1} \end{array} \right. & \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2e+1}{3}\right) & \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2 \arctan(\sqrt{e^x - 1}) \end{array} \right. & & & & \\ \frac{\pi}{2} & \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} & 2 \ln\left(\frac{3}{2}\right) & \left\{ \begin{array}{l}]0, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \tan x + \ln \tan(x) \end{array} \right. & & & \end{array}$$

Intégration des fractions rationnelles

Prérequis

Fonctions $\ln$ et $\arctan$.
 Petites décompositions en éléments simples.
 Forme canonique d'un trinôme du second degré.
 Changements de variable affines dans les intégrales.
 A la suite du cours de 1ère année.

Premier cas

Calcul 13.1



Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_1^2 \frac{1}{t+1} dt$

b) $\int_1^2 \frac{1}{2t+1} dt$

Calcul 13.2



Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} \frac{1}{\frac{t}{2} + \frac{1}{4}} dt$

b) $\int_0^{a^2} \frac{1}{t+a} dt$

Deuxième cas

Dans ce deuxième cas, il s'agit de reconnaître une expression du type $\frac{u'}{u}$.

Calcul 13.3



Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_1^2 \frac{2t+1}{t^2+t+1} dt$

b) $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\frac{t^2}{2} + \frac{1}{3}} dt$

Calcul 13.4



Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{t + \frac{1}{\sqrt{2}}}{t^2 + \sqrt{2}} dt$

b) $\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^1 \frac{t}{at^2+1} dt$

Troisième cas

Calcul 13.5 — Exemple détaillé d'un calcul d'intégrale.



a) Quels sont les deux zéros de $t \mapsto t^2 - 3t + 2$?

b) Trouver deux réels A et B tels que

pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, on ait $\frac{1}{(t-1)(t-2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t-2}$

c) Calculer $\int_3^4 \frac{2}{(t-1)(t-2)} dt$

Calcul 13.6



Calculer les intégrales suivantes, en procédant comme ci-dessus.

a) $\int_0^1 \frac{4}{t^2 - 4} dt$

c) $\int_0^1 \frac{1}{t^2 + 4t + 3} dt$

b) $\int_2^3 \frac{2}{t^2 - t} dt$

d) $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{4t^2 - 1} dt$

Calcul 13.7



Soit $a \in]0, 1[$. Calculer $\int_0^a \frac{1}{t^2 - a} dt$

Quatrième cas

Calcul 13.8



Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

a) En effectuant le changement de variables $t = au$ dans l'intégrale $\int_0^x \frac{dt}{t^2 + a^2}$, déterminer une primitive de

$x \mapsto \frac{1}{x^2 + a^2}$

Calcul 13.9



Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^1 \frac{1}{t^2 + 1} dt$

b) $\int_0^1 \frac{1}{t^2 + 3} dt$

Calcul 13.10



Calculer $\int_{-1}^2 \frac{1}{t^2 + 2} dt$

Synthèse

Calcul 13.11 — Mise sous forme canonique.



Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Mettre sous forme canonique les expressions suivantes (où $x \in \mathbb{R}$).

a) $x^2 + x + 1$

c) $\sqrt{2}x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}$

b) $2x^2 - 3x + 1$

d) $ax^2 + a^2x + a^3$

Calcul 13.12



Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_0^1 \frac{1}{1+2t+t^2} dt$

c) $\int_0^1 \frac{1}{1-t+t^2} dt$

b) $\int_{-1}^0 \frac{1}{1+t+t^2} dt$

d) $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{6t^2-5t+1} dt$

Calcul 13.13



Soit $a > 1$. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3t^2+2t+\frac{4}{9}} dt$

b) $\int_0^1 \frac{1}{t^2-(2a+1)t+a^2+a} dt$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{cccccccc} \ln \frac{1}{3} & \frac{\pi}{2\sqrt{2}} & 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} & \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} & \frac{\pi}{6\sqrt{3}} & \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} & \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} & \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \\ \ln(2) & 1 \text{ et } 2 & \frac{\pi}{4} & \frac{1}{2\sqrt{a}} \ln\left(\frac{\sqrt{a}-a}{a+\sqrt{a}}\right) & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \ln\left(\frac{5}{3}\right) & 2 \ln \frac{4}{3} & \sqrt{2}\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \sqrt{2} \frac{15}{16} \\ \ln\left(\frac{a^2}{a^2-1}\right) & \frac{1}{4} \ln \frac{1}{5} & \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) & \frac{\pi}{12} & \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{a+1}{2}\right) & \ln\left(\frac{3}{2}\right) & a\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^3}{4} \\ \ln(a+1) & A = -1 \text{ et } B = 1 & \ln\left(2\sqrt{\sqrt{2}-1}\right) & \ln \frac{33}{28} & \ln\left(\frac{7}{3}\right) & 2 \ln \frac{4}{3} & 2 \ln \frac{9}{10} \end{array}$$

Systèmes linéaires

Prérequis

Résolution par substitution d'une variable, par combinaisons linéaires de lignes.
A la suite du cours de 1ère année.

Systèmes de 2 équations à 2 inconnues

Calcul 14.1



Résoudre dans $\mathbb{R}^2$.

a) $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 3x + 4y = 13 \end{cases} \dots\dots\dots$

c) $\begin{cases} 3x - 6y = -3 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \dots\dots\dots$

b) $\begin{cases} 2x + y = 16 \\ x - y = 5 \end{cases} \dots\dots\dots$

d) $\begin{cases} 3x - 4y = -\sqrt{2} \\ 6x + 2y = 3\sqrt{2} \end{cases} \dots\dots\dots$

Calcul 14.2 — Systèmes avec paramètre.



Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ en fonction des valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = a \end{cases} \dots\dots\dots$

c) $\begin{cases} 3x + 5y = a \\ 2x - y = a^2 \end{cases} \dots\dots\dots$

b) $\begin{cases} x - ay = 3a + 2 \\ ax + y = 2a - 3 \end{cases} \dots\dots\dots$

d) $\begin{cases} x + 2y = 3a \\ 2x + 3y = 5a - a^2 \end{cases} \dots\dots\dots$

Systèmes de 2 équations à 3 inconnues

Calcul 14.3



Résoudre dans $\mathbb{R}^3$.

a) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 3x + y - 2z = 3 \end{cases} \dots\dots\dots$

c) $\begin{cases} x - y + 3z = 5/2 \\ x + 2y - z = 3/2 \end{cases} \dots\dots\dots$

b) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 6 \\ x + 2y - z = -2 \end{cases} \dots\dots\dots$

d) $\begin{cases} 5x + y + 2z = -5/2 \\ 2x - y + 2z = -5/3 \end{cases} \dots\dots\dots$

Réponses mélangées

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(\frac{1}{13}a + \frac{5}{13}a^2, \frac{2}{13}a - \frac{3}{13}a^2 \right) \right\} \quad \{(1 + z, -z, z); z \in \mathbb{R}\} \quad \{(3, 1)\} \quad \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\} \\ & (a - 2a^2, a + a^2) \quad \left\{ \left(x, \frac{-5}{12} - \frac{3}{2}x, \frac{-25}{24} - \frac{7}{4}x \right); x \in \mathbb{R} \right\} \quad (2, -3) \quad \left\{ \left(1 - \frac{a}{4}, \frac{-1}{2} + \frac{3}{8}a \right) \right\} \\ & \left\{ \left(\frac{13}{6} - \frac{5}{3}z, -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}z, z \right); z \in \mathbb{R} \right\} \quad \{(7, 2)\} \quad \left\{ \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \right\} \quad \{(1, y, 3 + 2y); y \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Prérequis

Forme algébrique et forme exponentielle.
A la suite du cours de 1ère année.

Pour s'échauffer

Calcul 15.1 — Écriture algébrique.



Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

- | | | | |
|-----------------------------|----------------------|----------------------------------|----------------------|
| a) $(2 + 6i)(5 + i)$ | <input type="text"/> | e) $(2 - 3i)^4$ | <input type="text"/> |
| b) $(3 - i)(4 + i)$ | <input type="text"/> | f) $\frac{1}{3 - i}$ | <input type="text"/> |
| c) $(4 - 3i)^2$ | <input type="text"/> | g) $\frac{2 - 3i}{5 + 2i}$ | <input type="text"/> |
| d) $(1 - 2i)(1 + 2i)$ | <input type="text"/> | h) $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ | <input type="text"/> |

Calcul 15.2 — Forme exponentielle.



Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle.

- | | | | |
|----------------------|----------------------|--|----------------------|
| a) 12 | <input type="text"/> | e) $-2e^{i\frac{3\pi}{5}}$ | <input type="text"/> |
| b) -8 | <input type="text"/> | f) $5 - 5i$ | <input type="text"/> |
| c) $\sqrt{3}i$ | <input type="text"/> | g) $-5 + 5i\sqrt{3}$ | <input type="text"/> |
| d) $-2i$ | <input type="text"/> | h) $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{6}}$ | <input type="text"/> |

Un calcul plus difficile

Calcul 15.3 — Une simplification.



On pose $z = \frac{1 + \sqrt{2} + i}{1 + \sqrt{2} - i}$.

- | | |
|---|----------------------|
| a) Calculer $ z $ | <input type="text"/> |
| b) Mettre z sous forme algébrique | <input type="text"/> |
| c) Calculer z^{2021} | <input type="text"/> |

Réponses mélangées

5	$2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$	$4 + 32i$	$\frac{4}{29} - \frac{19}{29}i$	$2e^{i\frac{8\pi}{5}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$
1	$5e^{-\frac{\pi}{4}i}$	$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$	$2e^{-i\frac{\pi}{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{3}{10} + \frac{1}{10}i$
$7 - 24i$	$10e^{-\frac{2\pi}{3}i}$	$-119 + 120i$	12	$8e^{i\pi}$	$\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$ $13 - i$

Trigonométrie et nombres complexes

Prérequis

Nombres complexes, trigonométrie.
A la suite du cours de 1ère année.

Dans toute cette fiche, x désigne une quantité réelle.

Linéarisation

Calcul 16.1



Linéariser :

a) $\cos^3(x)$

d) $\cos(3x) \sin^3(2x)$...

b) $\cos(2x) \sin^2(x)$

e) $\cos^3(2x) \cos(3x)$..

c) $\cos^2(2x) \sin^2(x)$...

f) $\sin^2(4x) \sin(3x)$...

Arc moitié, arc moyen

Calcul 16.2



Écrire sous forme trigonométrique (c'est-à-dire sous la forme $re^{i\theta}$, avec $r > 0$) :

a) $1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$

e) $-1 - e^{i\frac{\pi}{6}}$

b) $1 + e^{i\frac{7\pi}{6}}$

f) $1 - e^{i\frac{\pi}{12}}$

c) $e^{-i\frac{\pi}{6}} - 1$

g) $\frac{1 + e^{i\frac{\pi}{6}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{12}}}$

d) $1 + ie^{i\frac{\pi}{3}}$

h) $(1 + e^{i\frac{\pi}{6}})^{27}$

Calcul 16.3



Écrire sous forme trigonométrique (c'est-à-dire sous la forme $re^{i\theta}$, avec $r > 0$) :

a) $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{2}}$

b) $e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{2}}$

Délinéarisation

Calcul 16.4



Exprimer en fonction des puissances de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$:

a) $\cos(3x)$

b) $\sin(4x)$

Factorisation

Calcul 16.5



Factoriser :

a) $\cos(x) + \cos(3x)$

c) $\cos(x) - \cos(3x)$

b) $\sin(5x) - \sin(3x)$

d) $\sin(3x) + \sin(5x)$

Calcul 16.6



Factoriser :

a) $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x)$

b) $\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) + \cos(7x)$

c) $\cos(x) + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{cccccc}
 2 \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i \frac{11\pi}{12}} & 2 \sin\left(\frac{\pi}{24}\right) e^{-i \frac{11\pi}{24}} & \frac{\sin(8x)}{2 \sin(x)} & 2 \cos(4x) \sin(x) & 2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i \frac{5\pi}{12}} \\
 \left(-2 \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right) e^{-i \frac{5\pi}{12}} & \frac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)} e^{\frac{13i\pi}{24}} & -\frac{1}{4} \cos(4x) + \frac{1}{2} \cos(2x) - \frac{1}{4} \\
 2 \sin(4x) \cos(x) & 4 \cos^3(x) \sin(x) - 4 \cos(x) \sin^3(x) & 2 \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{-\frac{7i\pi}{12}} \\
 2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i \frac{\pi}{12}} & 0 & \frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right) \sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} & -\frac{1}{8} \cos(6x) + \frac{1}{4} \cos(4x) - \frac{3}{8} \cos(2x) + \frac{1}{4} \\
 2 \cos(2x) \cos(x) & \frac{\cos(9x)}{8} + \frac{3 \cos(5x)}{8} + \frac{\cos(3x)}{8} + \frac{3 \cos(x)}{8} & \frac{1}{4} \cos(3x) + \frac{3}{4} \cos(x) \\
 -\frac{\sin(9x)}{8} + \frac{3 \sin(5x)}{8} - \frac{\sin(3x)}{8} - \frac{3 \sin(x)}{8} & 2 \sin(x) \sin(2x) & 4 \cos^3(x) - 3 \cos(x) \\
 2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i \frac{13\pi}{12}} & 2 \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) e^{\frac{5i\pi}{12}} & 2^{27} \cos^{27}\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i \frac{\pi}{4}} & -\frac{1}{4} \sin(11x) + \frac{1}{4} \sin(5x) + \frac{1}{2} \sin(3x)
 \end{array}$$

Sommes et produits

Prérequis

Factorielle. Identités remarquables. Décomposition en éléments simples.
Fonctions usuelles (racine carrée, logarithme népérien).
A la suite du cours de 1ère année.

Si q est un nombre réel et si $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$ et $m \leq n$, on a

$$\begin{aligned} \bullet \sum_{k=m}^n k &= \frac{(n-m+1)(m+n)}{2} & \bullet \sum_{k=1}^n k^3 &= \left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \text{ (Non par coeur)} \\ \bullet \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \bullet \sum_{k=m}^n q^k &= \begin{cases} q^m \frac{1-q^{n-m+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-m+1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul.

Calculs de sommes simples

Calcul 17.1



Calculer les sommes suivantes.

a) $\sum_{k=1}^{n+2} n$

c) $\sum_{k=1}^n (3k + n - 1)$

b) $\sum_{k=2}^{n+2} 7k$

d) $\sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{k-4}{3} \right)$

Calcul 17.2



Même exercice.

a) $\sum_{k=1}^n k(k+1)$

d) $\sum_{k=0}^n 2^k 5^{n-k}$

b) $\sum_{k=0}^n (4k(k^2 + 2))$

e) $\sum_{k=1}^n (7^k + 4k - n + 2)$

c) $\sum_{k=2}^{n-1} 3^k$

f) $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$

Calcul 17.3 — Produits.



Calculer les produits suivants, où p et q sont des entiers naturels non nuls tel que $p \geq q$.

a) $\prod_{k=p}^q 2$

c) $\prod_{k=1}^n 5\sqrt{k} \times k$

b) $\prod_{k=1}^n 3^k$

d) $\prod_{k=-10}^{10} k$

Changements d'indice

Calcul 17.4



Calculer les sommes suivantes en effectuant le changement d'indice demandé.

a) $\sum_{k=1}^n n+1-k$ avec $j = n+1-k$

b) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}$ avec $j = n+1-k$

c) $\sum_{k=1}^n k2^k$ avec $j = k-1$

d) $\sum_{k=3}^{n+2} (k-2)^3$ avec $j = k-2$

Sommes télescopiques, produits télescopiques

Calcul 17.5 — Sommes télescopiques.



Calculer les sommes suivantes.

a) $\sum_{k=2}^{n+2} (k+1)^3 - k^3$

c) $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$

b) $\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

d) $\sum_{k=1}^n k \times k!$

Calcul 17.6 — Produits télescopiques.



Calculer les produits suivants.

a) $\prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k}$

c) $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right)$

b) $\prod_{k=1}^n \frac{2k+1}{2k-1}$

d) $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

Calcul 17.7



Calculer les sommes suivantes, en cherchant à faire apparaître une somme télescopique.

a) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$

b) $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+2)(k+3)}$

Sommentation par paquets

Calcul 17.8



Calculer les sommes suivantes.

a) $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2$

b) $\sum_{k=0}^{2n} \min(k, n)$

Sommes doubles

Calcul 17.9



Calculer les sommes doubles suivantes.

a) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} j$

b) $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$

c) $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i + j)$

d) $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i + j)^2$

e) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \ln(i^j)$

f) $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j)$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{cccccc}
 1 - \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n} & \frac{7(n+1)(n+4)}{2} & \frac{7}{6}(7^n - 1) + n(n+4) & \frac{n+1}{2n} & \frac{n(n^2-1)}{2} \\
 (n+2)^3 - 2^3 & 1 - \frac{1}{(n+1)!} & \ln(n+1) & 1 - 4n^2 & n(n+2) & \frac{n(n+1)}{2} \\
 5^{n+1} \frac{1 - (\frac{2}{5})^{n+1}}{3} & \frac{n^2(n+1)}{2} & 0 & \frac{(n-2)(n-7)}{6} & \frac{1}{2} - \frac{1}{n+3} & 0 \quad 2n^2 + n \\
 n(n+1)(n^2 + n + 4) & n2^{n+1} + 2(1 - 2^n) & 2^{q-p+1} & \frac{n(5n+1)}{2} & \frac{n(3n+1)}{2} & \\
 \frac{n(n+1)(7n^2 + 13n + 4)}{12} & \frac{9}{2}(3^{n-2} - 1) & \frac{n(n+3)}{4} & \frac{n^2(n+1)^2}{4} & \frac{n(n+1)(n+2)}{3} & \\
 \frac{n(n+1)}{2} \ln(n!) & n+1 & (n+1)! - 1 & 3^{\frac{n(n+1)}{2}} & \frac{n+1}{2n} & \frac{n(n+1)(4n-1)}{6} \quad 5^n (n!)^{\frac{3}{2}}
 \end{array}$$

Coefficients binomiaux

Prérequis

Factorielles. Coefficients binomiaux. Formule du binôme de Newton.
Dès le début de 1ère année, et à la suite du cours de 1ère année.

La lettre n désigne un entier naturel non nul.

Manipulations de factorielles et coefficients binomiaux

Calcul 18.1 — Pour s'échauffer.



Donner la valeur des expressions suivantes :

a) $\frac{101!}{99!}$

d) $\binom{6}{2}$

b) $\frac{10!}{7!}$

e) $\binom{8}{3}$

c) $\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}$

f) $4 \times \binom{7}{4}$

Calcul 18.2 — Pour s'échauffer – bis.



Écrire les expressions suivantes à l'aide de factorielles, coefficients binomiaux et le cas échéant à l'aide de puissances.

a) $6 \times 7 \times 8 \times 9$

c) $2 \times 4 \times \cdots \times (2n)$

b) $\frac{6 \times 7 \times 8 \times 9}{2 \times 3 \times 4}$

d) $3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)$...

Calcul 18.3 — Avec des paramètres.



Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre k désigne un entier naturel tel que $k < n$.

a) $\binom{n}{2}$ (pour $n \geq 2$)

d) $\frac{(n+2)!}{n!}$

b) $\binom{n}{3}$ (pour $n \geq 3$)

e) $\frac{1}{n!} - \frac{n}{(n+1)!}$

c) $\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}$

f) $\frac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \frac{n!}{2^{2n}}$

Calcul 18.4 — Avec des paramètres - bis.



Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre a désigne un nombre non nul.

a) $\frac{1}{n!} + \frac{1}{2n \times (n+1)!} + \frac{1}{2 \times (n+2)!}$

b) $\frac{(3(n+1))!}{a^{3(n+1)} \times ((n+1)!)^3} \div \frac{(3n)!}{a^{3n} \times (n!)^3}$

Autour du binôme de Newton

Calcul 18.5 — Le binôme de Newton.



Calculer les sommes ci-dessous à l'aide de la formule du binôme de Newton.

a) $\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k}$

c) $\sum_{k=0}^n 2^{2n-k} \binom{n}{k}$

b) $\sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k}$

d) $\sum_{k=0}^n 2^{k+2} \binom{n}{k} \times 3^{2n-k+1}$

Calcul 18.6



a) Développer à l'aide de la formule du binôme de Newton $(1 + 1)^n + (1 - 1)^n$

b) Calculer $\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}$

Calcul 18.7



Avec 2 méthodes : (1) En utilisant la fonction $x \mapsto (1+x)^n$, ses dérivées d'ordre 1 et 2 et sa primitive s'annulant en 0, calculer...

(2) En utilisant $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$, $k^2 = k(k-1) + 1$, calculer...

a) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$

c) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times k^2$

b) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times k$

d) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1}$

Calcul 18.8



a) Donner le coefficient de x^n dans le développement de $(1+x)^{2n}$

b) Donner-en une autre expression en développant le produit $(1+x)^n(1+x)^n$

c) Calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 2^{n-1} & 10\ 100 & 2 \times \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} & \binom{9}{4} & 140 & 2^n \times n! & \binom{2n}{n} & \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \\
 \frac{1}{30} & \frac{(n+1)^3}{n \times (n+2)!} & n(n+1)2^{n-2} & \frac{n! \times (n-3)}{2^{2n+2}} & \frac{k+1}{n-k} & \frac{n(n-1)}{2} & 3^n \\
 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 & \frac{(2n+1)!}{2^n \times n!} & \frac{1}{(n+1)!} & 6^n & \binom{2n}{n} & (n+2)(n+1) & \frac{2^{n+1}-1}{n+1} \\
 n2^{n-1} & 15 & 720 & \frac{3(3n+2)(3n+1)}{a^3(n+1)^2} & 56 & \frac{9!}{5!} & 12 \times 15^n & 0 & 2^n
 \end{array}$$

Manipulation des fonctions usuelles

Prérequis

Dérivation, équations du second degré.
Après le cours de 1ère année.

Calculs de valeurs

Calcul 19.1 — Fonctions circulaires réciproques.



Calculer les valeurs suivantes.

a) $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$

d) $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

b) $\frac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

e) $\arctan(1)$

c) $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

f) $\arccos\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)$

Résolution d'équations

Calcul 19.2 — Fonctions $x \mapsto a^x$.



Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

a) $3^x = \frac{9^x}{2}$

c) $2^x = 3 \times 4^x$

b) $4^x = 2 \times 2^x$

d) $10^{2x} = 4 \times 5^x \times 9^{\frac{x}{2}}$...

Calcul 19.3 — Fonctions $x \mapsto a^x$: plus difficile..



Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

On pourra faire intervenir une équation de degré 2 en posant une nouvelle variable.

a) $2^x + 4^x = 4$

b) $16^x - 3 \times 4^x + 2 = 0$

c) $2 \times 9^x - 3^x - 3 = 0$

d) $3^x + 3^{2x} - 1 = 0$

Calcul 19.4 — Équations avec les fonctions circulaires réciproques.



Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in [-1, 1]$ pour les deux premiers calculs, et $x \in \mathbb{R}$ pour les autres.

- | | |
|--|--|
| a) $\arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$ <input style="width: 150px; height: 30px;" type="text"/> | d) $\arcsin(\sin(x)) = \frac{\pi}{3}$ <input style="width: 150px; height: 30px;" type="text"/> |
| b) $\cos(\arccos(x)) = 0$ <input style="width: 150px; height: 30px;" type="text"/> | e) $\arcsin(\sin(x)) = \frac{1}{3}$ <input style="width: 150px; height: 30px;" type="text"/> |
| c) $\arccos(\cos(x)) = 0$ <input style="width: 150px; height: 30px;" type="text"/> | f) $\tan(\arctan(x)) = 1$ <input style="width: 150px; height: 30px;" type="text"/> |

Dérivation

Calcul 19.5 — Quelques calculs de dérivées.



Dériver les fonctions suivantes.

- | | |
|---|--|
| a) $x \mapsto 2^x + x^2$ <input style="width: 150px; height: 30px;" type="text"/> | c) $x \mapsto x^x$ <input style="width: 150px; height: 30px;" type="text"/> |
| b) $x \mapsto \frac{3^x}{5^x + 1}$ <input style="width: 150px; height: 30px;" type="text"/> | d) $x \mapsto \frac{\arctan(x)}{x^2 + 1}$ <input style="width: 150px; height: 30px;" type="text"/> |

Calcul 19.6 — Dérivées plus compliquées.



Dériver les fonctions suivantes. La fonction F est une primitive de $x \mapsto e^{-x^2}$.

- | | |
|---|--|
| a) $x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ | <input style="width: 150px; height: 30px;" type="text"/> |
| b) $x \mapsto F(x^x)$ | <input style="width: 150px; height: 30px;" type="text"/> |
| c) $x \mapsto x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$ | <input style="width: 150px; height: 30px;" type="text"/> |

Réponses mélangées

$1 - \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$	$x \mapsto 0$	$\frac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}$	$\left\{0; \frac{1}{2}\right\}$	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\ln(3)}{\ln(2)}$	$\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$	2	$\frac{\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{\ln(3)}$
$\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\frac{\pi}{3}$	$\left\{\frac{1}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$x \mapsto \frac{15^x \ln(3/5) + 3^x \ln(3)}{(5^x + 1)^2}$	0				
	$\cup \left\{\pi - \frac{1}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$							
1	$\frac{\pi}{6}$	$x \mapsto \ln(2) \times 2^x + 2x$	$x \mapsto \arctan(x)$	$x \mapsto \frac{1 - 2x \arctan(x)}{(x^2 + 1)^2}$	1	$\frac{\pi}{6}$		
$x \mapsto (\ln(x) + 1)x^x$	1	$x \mapsto (\ln(x) + 1)x^x e^{-x^2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$		$\frac{\ln(4)}{\ln(20/3)}$		
				$\cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$				

Suites numériques

Prérequis

Suites récurrentes. Suites arithmétiques. Suites géométriques.
A la suite du cours de 1ère année.

Calcul de termes

Calcul 20.1 — Suite explicite.

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2n+3}{5} \times 2^{n+2}$. Calculer :

- | | | | |
|----------------|----------------------|--------------------|----------------------|
| a) u_0 | <input type="text"/> | c) u_{n+1} | <input type="text"/> |
| b) u_1 | <input type="text"/> | d) u_{3n} | <input type="text"/> |

Calcul 20.2 — Suite récurrente.

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 3$. Calculer :

- | | | | |
|----------------|----------------------|----------------|----------------------|
| a) u_2 | <input type="text"/> | b) u_3 | <input type="text"/> |
|----------------|----------------------|----------------|----------------------|

Calcul 20.3 — Suite récurrente.

On définit la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $w_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \frac{1}{2}w_n^2$. Calculer :

- | | | | |
|----------------|----------------------|-----------------------------|----------------------|
| a) w_2 | <input type="text"/> | b) son centième terme | <input type="text"/> |
|----------------|----------------------|-----------------------------|----------------------|

Suites arithmétiques et géométriques

Calcul 20.4 — Suite arithmétique.

La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2. Calculer :

- | | | | |
|---|----------------------|--|----------------------|
| a) a_{10} | <input type="text"/> | c) $a_{1\,000}$ | <input type="text"/> |
| b) $s_{100} = a_0 + a_1 + \dots + a_{99}$ | <input type="text"/> | d) $s_{101} = a_0 + a_1 + \dots + a_{100}$ | <input type="text"/> |

Calcul 20.5 — Suite arithmétique.

La suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r vérifiant que $b_{101} = \frac{2}{3}$ et $b_{103} = \frac{3}{4}$. Calculer :

- | | | | |
|--------------------|----------------------|--------------|----------------------|
| a) b_{102} | <input type="text"/> | b) r | <input type="text"/> |
|--------------------|----------------------|--------------|----------------------|

Calcul 20.6 — Suite géométrique.

La suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $g_0 = 3$ et de raison $\frac{1}{2}$. Calculer :

- a) Son dixième terme est :
- b) $\sigma_{10} = g_0 + g_1 + \dots + g_9$
- c) g_{10}
- d) $\sigma_{11} = g_0 + g_1 + \dots + g_{10}$

Calcul 20.7 — Suite géométrique.



La suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q vérifiant que $h_{11} = \frac{5\pi}{11}$ et $h_{13} = \frac{11\pi}{25}$. Calculer :

- a) h_{12}
- b) q

Suites récurrentes sur deux rangs

Calcul 20.8



Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par que $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$. Calculer :

- a) u_n
- b) u_5

Calcul 20.9



Soit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par que $v_0 = 0$, $v_1 = \sqrt{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = 2v_{n+1} + v_n$. Calculer :

- a) v_n
- b) v_2

Calcul 20.10 — Suite de Fermat.



Soit la suite $(F_n)_{n \geq 0}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_n = 2^{2^n} + 1$. Calculer :

- a) F_3
- b) F_4
- c) $(F_{n-1} - 1)^2 + 1$
- d) $F_n \times (F_n - 2)$
- e) F_n^2
- f) $F_{n+1}^2 - 2(F_n - 1)^2$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{cccccccc}
 \frac{6141}{1024} & \frac{17}{24} & 2 & 3^n + (-2)^n & 29 & 10\,201 & \frac{12}{5} & F_n \\
 \frac{\pi\sqrt{5}}{5} & \frac{3}{512} & 8 & 2\sqrt{2} & 10\,000 & 2 & \frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2} & \frac{11\sqrt{5}}{25} \\
 \frac{1}{24} & F_{n+2} & 13 & \frac{3}{1\,024} & F_{n+1} + 2^{2^n+1} & 2\,001 & \frac{(2n+5) \cdot 2^{n+3}}{5} & \\
 65\,537 & 21 & \frac{3069}{512} & F_{n+1} - 2 & 257 & 211 & \frac{3(2n+1) \cdot 2^{3n+2}}{5} &
 \end{array}$$

Inégalités

Prérequis

Manipulations d'inégalités.
Dès le début de 1ère année.

Pour s'échauffer

Calcul 21.1



Vrai-Faux : Soient deux réels a et b tq : $1 < a < 2$ et $-5 < b < -3$

a) $-4 < a + b < -1$

e) $\frac{-2}{3} < \frac{a}{b} < \frac{-1}{5}$

b) $6 < a - b < 5$

f) $\frac{\sqrt{a-1}}{b^2} < \frac{1}{25}$

c) $-19 < 3b - 2a < -11$

g) $a^2 \leq a$

d) $-5 < ab < -6$

h) $(-5)^n < b^n < (-3)^n, (n \in \mathbb{N})$

Calcul 21.2



Vrai-Faux : Soient deux réels a et b

a) $-ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$

b) $\frac{1}{2}(a^2 + b^2) \leq ab$

c) $|a| \leq 1 + a^2$

Calcul 21.3



Vrai-Faux : Soit x un réel

a) $\sin x \leq (\sin x)^2$

c) $(\sin x)^2 \leq |\sin x|$

b) $(\sin x)^2 \leq \sin x$

d) $1 - \cos(2x) \leq 2|\sin x|$

Pour comparer des intégrales

Calcul 21.4



Vrai-Faux : Soit un réel x , $1 \leq x \leq 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{1+x} dx$

a) $0 \leq \frac{(\ln x)^n}{1+x} \leq \frac{(\ln 2)^n}{3}$

c) $0 \leq \frac{(\ln x)^n}{1+x} \leq \frac{(\ln x)^{n+1}}{1+x}$

b) $0 \leq \frac{(\ln x)^n}{1+x} \leq (\ln 2)^n$

d) $0 \leq \frac{(\ln x)^{n+1}}{1+x} \leq \frac{(\ln x)^n}{1+x}$

- e) $\frac{1}{3} \leq \frac{(\ln x)^n}{1+x} \leq \frac{1}{2}$
- f) La suite $(u_n)_n$ est croissante.
- g) La suite $(u_n)_n$ est décroissante. ...
- h) La suite $(u_n)_n$ est bornée.
- i) La suite $(u_n)_n$ converge vers 0.

Calcul 21.5



Vrai-Faux : Soit un réel x , $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $u_n = \int_{1/2}^1 \frac{(\ln x)^n}{1+x} dx$

- a) $(\ln(1/2))^n \leq \frac{(\ln x)^n}{1+x}$
- b) $0 \leq \frac{(\ln x)^n}{1+x} \leq \frac{(\ln x)^{n+1}}{1+x}$
- c) $0 \leq \frac{(\ln x)^{n+1}}{1+x} \leq \frac{(\ln x)^n}{1+x}$
- d) La suite $(u_n)_n$ est monotone.
- e) La suite $(u_n)_n$ converge vers 0.

Pour comparer des sommes

Calcul 21.6



Vrai-Faux : Pour tout entier $n \geq 1$, $T_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

- a) $0 \leq T_n \leq n$
- b) $\frac{1}{2} \leq T_n \leq 1$
- c) $T_{n+1} \leq T_n$
- d) $T_n \leq T_{n+1}$
- e) La suite $(T_n)_n$ converge.

Calcul 21.7



Vrai-Faux

Soit $n \geq 1$, on définit $u_n = -2\sqrt{n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$

- a) $u_{n+1} \leq u_n$
- b) $u_n \leq u_{n+1}$
- c) $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}} \leq \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$
- d) La suite $(u_n)_n$ est bornée.

Réponses mélangées

Faux	Faux	Faux	Faux	Faux	Vrai	Vrai	Vrai	Faux	
Vrai	Vrai	Vrai	Faux	Faux	Vrai	Vrai	Faux	Vrai	Faux
Faux	Faux	Vrai	Vrai	Faux	Faux	Vrai	Vrai	Vrai	
Vrai	Faux	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux	Vrai

Développements limités

Prérequis

Il est nécessaire de connaître les développements (en 0) des fonctions usuelles.
A la suite du cours de 1ère année.

Développements limités

Calcul 22.1 — Développements limités d'une somme ou d'un produit de fonctions.



Former le développement limité, à l'ordre indiqué et au voisinage de 0, de la fonction de la variable réelle x définie par l'expression suivante :

a) À l'ordre 3 : $f(x) = \sin(x) + 2\ln(1+x)$

b) À l'ordre 2 : $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$

c) À l'ordre 4 : $\sin(x)(\cos(x) - 1)$

d) À l'ordre 4 : $e^x \sin(x)$

Calcul 22.2 — Développements limités d'une fonction composée.



Former le développement limité, à l'ordre et au voisinage indiqués, de la fonction de la variable réelle x définie par l'expression suivante :

a) À l'ordre 2, en 0 : $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$

b) À l'ordre 4, en 0 : $\sqrt{\cos(x)}$

c) À l'ordre 3, en 0 : e^{e^x}

d) À l'ordre 2, en 1 : $\frac{\ln(2-x)}{x^2}$

Equivalents

Calcul 22.3



Déterminer un équivalent au voisinage indiqué, de la fonction de la variable réelle x définie par l'expression suivante :

a) En 0 : $\frac{1}{x(e^x - 1)} - \frac{1}{x^2}$

b) En $+\infty$: $\frac{\sin(1/x)}{x+1}$

c) En $+\infty$: $x \ln(x+1) - (x+1) \ln(x)$

d) En $+\infty$: $\left(\frac{1}{x} + 1\right)^{x^2}$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{lll}
 e - \frac{ex}{2} + \frac{11ex^2}{24} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) & -\ln(x) & e^{-\frac{1}{2}}e^x \\
 x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^4) & 3x - x^2 + \frac{x^3}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^3) & -\frac{x^3}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^4) \\
 x - \frac{3}{2}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2) & \frac{1}{x^2} & e\left(1 + x + x^2 - \frac{5}{6}x^3\right) + o_{x \rightarrow 0}(x^3) \\
 1 - x + \frac{3}{2}(x-1)^2 + o_{x \rightarrow 1}((x-1)^2) & 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^4) & -\frac{1}{2x}
 \end{array}$$

Calcul matriciel

Prérequis

Calculs algébriques (sommes), coefficients binomiaux.
A la suite du cours de 1ère année.

Calcul matriciel

Calcul 23.1 — Calculs de produits matriciels.



Dans cet exercice, on note A , B , C , D , E les cinq matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits matriciels suivants.

a) $A^2 \dots$

d) $E \times B$

g) $D^2 \dots$

b) $A^3 \dots$

e) $A \times E$

h) $D \times C$

c) $B \times E$

f) $B \times A$

i) $B^\top \times B$

Calcul 23.2 — Calcul de puissances.



On note

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice D étant de taille $n \times n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$), et où $\theta \in \mathbb{R}$.

Calculer le carré, le cube de chacune de ces matrices et utiliser ces calculs pour conjecturer leur puissance k -ième, pour $k \in \mathbb{N}$.

a) $A^2 \dots$	e) $B^3 \dots$	i) $C^k \dots$
b) $A^3 \dots$	f) $B^k \dots$	j) $D^2 \dots$
c) $A^k \dots$	g) $C^2 \dots$	k) $D^3 \dots$
d) $B^2 \dots$	h) $C^3 \dots$	l) $D^k \dots$

Calcul 23.3 — Calculs avec des sommes.



Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, et $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ les matrices de termes généraux suivants :

$$a_{ij} = \binom{i-1}{j-1}, \quad b_{ij} = 2^i 3^{j-i}$$

Donner le coefficient d'indice (i, j) des matrices suivantes. On simplifiera au maximum le résultat obtenu et, notamment, on trouvera une expression sans le symbole $\sum$.

a) $A \times B \dots\dots\dots$	c) $B^\top \times B \dots\dots\dots$
b) $B^2 \dots\dots\dots$	d) $[A^2]_{i,j} \dots\dots\dots$

Inversion de matrices

Calcul 23.4 — Détermination d'inversibilité, calcul d'inverses.



Dans cet exercice, on note les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \pi & e \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+i & 2-i \\ i & -i \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \pi & \pi & 2\pi \\ \pi & 0 & 0 \\ -\pi & -2\pi & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer, si elle existe, l'inverse de chacune des matrices. Si elle n'est pas inversible, indiquer dans la case « non inversible » .

a) $A \dots$

d) $D \dots$

g) $G \dots$

b) $B \dots$

e) $E \dots$

h) $H \dots$

c) $C \dots$

f) $F \dots$

i) $J \dots$

Calcul 23.5 — Matrices dépendant d'un paramètre.

On note λ et μ deux paramètres réels. On note A et B les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Pour chaque matrice, donner une condition nécessaire et suffisante (abrégée ci-dessous en CNS) sur λ pour que la matrice soit inversible et en donner, dans ce cas, l'inverse.

a) CNS pour A
inversible ...

c) CNS pour B
inversible ...

b) Inverse de A ...

d) Inverse de B ...

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2^k & 3^k - 2^k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2(\pi - e)} \begin{pmatrix} 2 & -e \\ -2 & \pi \end{pmatrix}$$

$$\text{Non inversible!} \quad \frac{1}{1-\lambda} \begin{pmatrix} -1-\lambda+\lambda^2 & 1-\lambda & 2-\lambda \\ 1 & 0 & -1 \\ 1-\lambda^2 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \neq 1 \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 17 \text{ (matrice } 1 \times 1) \quad 2^{i-j} \binom{i-1}{j-1} \quad \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 & 4 & -2 \\ -16 & -6 & 7 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \neq 1 \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 0 \\ 8 & -6 & 4 & 2 \\ -7 & 5 & -3 & -1 \\ -5 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 2 & 14 & -4 \\ -1 & -7 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} n^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & (n^2) & \vdots \\ n^2 & \cdots & n^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 9 & -7 & 3 \end{pmatrix} \quad 2 \times 3^{i+j} \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right) \quad \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & (n) & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos(3\theta) & -\sin(3\theta) \\ \sin(3\theta) & \cos(3\theta) \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{1-\lambda} \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 2\lambda+2 & \lambda & -2\lambda-1 \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \quad n^{k-1} D \quad \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 15 & 3 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1-2i \\ 1 & -1+i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 7 & 49 & -14 \\ -2 & -14 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & -6 & -5 \\ 15 & -1 & 11 \\ 18 & -26 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad 2^{i+1} 3^{j-i} (2^n - 1) \quad 2 \times 3^{j-i} \times 5^{i-1}$$

Équations différentielles

Prérequis

Équations différentielles.
A la suite du cours de 1ère année.

Équations d'ordre 1 à coefficients constants

Calcul 24.1



Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a) $y' = 12y$ et $y(0) = 56$

b) $y' = y + 1$ et $y(0) = 5$

c) $y' = 3y + 5$ et $y(0) = 1$

d) $y' = 2y + 12$ et $y(0) = 3$

Calcul 24.2



Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a) $5y' = -y$ et $y(1) = e$

b) $7y' + 2y = 2$ et $y(7) = -1$

c) $y' - \sqrt{5}y = 6$ et $y(0) = \pi$

d) $y' = \pi y + 2e$ et $y(\pi) = 12$

Équations d'ordre 2, homogènes, à coefficients constants

Calcul 24.3 — Une équation avec conditions initiales.



Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$

b) $y'' - 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$

c) $y'' - 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 3$

d) $y'' - 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 3i$

Calcul 24.4 — Racines doubles, Racines simples.



Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a) $y'' - y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$

b) $y'' + 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 2$ et $y'(0) = 3$

c) $y'' + y' - 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$

d) $y'' - 2y' + y = 0$ et $y(0) = 2$ et $y'(0) = 1$

e) $y'' + 4y' + 4y = 0$ et $y(1) = 1$ et $y'(1) = -3$

Calcul 24.5 — Racines complexes.



Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy suivants :

a) $y'' + y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$

b) $y'' + y' + y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$

c) $y'' + 2y' + 2y = 0$ et $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

d) $y'' - 2y' + 5y = 0$ et $y(0) = i$ et $y'(0) = -i$

Réponses mélangées

$$\begin{array}{llll}
 x \mapsto \frac{8e^{3x} - 5}{3} & x \mapsto (2-x)e^{2-2x} & x \mapsto e^{-x} \sin(x) & x \mapsto \left(12 + \frac{2e}{\pi}\right)e^{\pi x - \pi^2} - \frac{2e}{\pi} \\
 x \mapsto \cos x + 2 \sin x & x \mapsto 56e^{12x} & x \mapsto 9e^{2x} - 6 & x \mapsto 1 - 2e^{-2x/7+2} & x \mapsto 7e^{-x} - 5e^{-2x} \\
 x \mapsto e^x \left(\frac{-1+i}{2} e^{2ix} + \frac{1+i}{2} e^{-2ix} \right) & x \mapsto 6e^x - 1 & x \mapsto e^x & x \mapsto 2e^{2x} - e^x \\
 x \mapsto \frac{4}{3}e^x - \frac{1}{3}e^{-2x} & x \mapsto e^{2x} & x \mapsto e^{(6-x)/5} & x \mapsto e^{-x/2} \left(\cos \frac{\sqrt{3}x}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} \right) \\
 x \mapsto (2-3i)e^x + (3i-1)e^{2x} & x \mapsto (2-x)e^x & x \mapsto \left(\frac{6}{\sqrt{5}} + \pi \right) e^{\sqrt{5}x} - \frac{6}{\sqrt{5}} & x \mapsto e^x
 \end{array}$$

Fonctions de deux variables

Prérequis

Fonctions d'une variable réelle (limites, continuité, dérivabilité)
A la suite du cours de 1ère année.

Les fondamentaux

Calcul 25.1 — Ensembles de définition.

Déterminer le plus grand ensemble de définition possible de chacune des fonctions suivantes.

a) $(x, y) \mapsto \ln(x) + \sqrt{y}$

b) $(x, y) \mapsto \frac{x\sqrt{y}}{x^2 + y^2}$

c) $(x, y) \mapsto \sqrt{16 - x^2 - y^2} \ln(x^2 + y^2 - 16)$

Calcul 25.2 — Dérivation partielle.

Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes.

a) $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^5 + xy + \pi$

b) $f : (x, y) \mapsto \sin(2xy - y)$

c) $f : (x, y) \mapsto (x^2y, x^2 - y^2)$

d) $f : (x, y) \mapsto \arctan(2x + y)$

Calcul 25.3

Même exercice.

a) $f : (x, y) \mapsto \cos(x - y)$

b) $f : (x, y) \mapsto x \cos(e^{xy})$

c) $f : (x, y) \mapsto x^y$

d) $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Composition de fonctions

Calcul 25.4



On note $w(t) = f(u(t), v(t))$. Calculer $w'(t)$ pour chacune des fonctions f, u, v définies ci-dessous.

a) $f(x, y) = 4x^2 + 3y^2$ avec $\begin{cases} u = \sin \\ v = \cos \end{cases}$

b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ avec $\begin{cases} u(t) = e^{2t} \\ v(t) = e^{-t} \end{cases}$

c) $f(x, y) = x^2 - 3xy + 2y^2$ avec $\begin{cases} u(t) = 3 \sin(2t) \\ v(t) = 4 \cos(2t) \end{cases}$

Calcul 25.5 — Changements de variables.



Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}^*$.

Exprimer les dérivées partielles de $f \circ \varphi$ selon celles de f pour les fonctions suivantes.

a) $\varphi : (u, v) \mapsto \left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c} \right)$

b) $\varphi : (r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$

Calcul 25.6 — Points critiques.



Déterminer les points critiques de la fonction f .

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 1$

b) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$

c) $f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$

d) $f(x, y) = y(x^2 + (\ln y)^2)$

e) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$

Réponses mélangées

$$\begin{aligned}
 & (0, 1) \text{ et } (0, e^{-2}). \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (2xy, 2x) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x^2, -2y) \\
 & \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial u}(u, v) = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c} \right) - \frac{1}{2c} \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c} \right) \\
 & \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial v}(u, v) = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c} \right) + \frac{1}{2c} \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c} \right) \quad]0, +\infty[\times]0, +\infty[\\
 & \frac{2e^{4t} + e^{-2t}}{\sqrt{e^{4t} - e^{-2t}}} \quad \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial \theta}(r, \theta) = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \\
 & \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y x^{y-1} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \ln x \quad (0, 0) \\
 & (0, 0), (1, 1) \text{ et } (-1, -1). \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\sin(x-y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sin(x-y) \\
 & \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial r}(r, \theta) = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \\
 & \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 5y^4 + x \quad (0, 3) \quad \emptyset \\
 & \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2}{1 + (2x + y)^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{1 + (2x + y)^2} \\
 & \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 y}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\
 & -72 \cos(4t) - 46 \sin(4t) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos(e^{xy}) - xy \sin(e^{xy}) e^{xy} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x^2 \sin(e^{xy}) e^{xy} \\
 & (0, 0) \text{ et } (-1, -1). \quad \sin(2t) \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0\} \setminus \{(0, 0)\} \\
 & \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2y \cos(2xy - y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (2x - 1) \cos(2xy - y)
 \end{aligned}$$

Séries numériques

Prérequis

Séries usuelles (convergence et sommes)
A la suite du cours de 2^{ième} année.

Séries géométriques, exponentielles

Dans les calculs de cette section, reconnaître chacune des séries suivantes, dire si elle converge, et le cas échéant calculer sa somme.

Calcul 26.1 — Séries géométriques.



a) $\sum_{k \geq 0} 2^k$

c) $\sum_{k \geq 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k$

b) $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^k}$

d) $\sum_{k \geq 10} \frac{1}{3^k}$

Calcul 26.2 — Séries exponentielles.



a) $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}$

c) $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{2^k \times k!}$

b) $\sum_{k \geq 2} \frac{2^k}{k!}$

Séries télescopiques

Calcul 26.3



Prouver la convergence et calculer la somme de chacune des séries suivantes :

a) $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2 + k}$.

On pourra chercher a et b tels que pour tout k , $\frac{1}{k^2 + k} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$

b) $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^3 + 3k^2 + 2k}$.

On pourra chercher a , b et c tels que pour tout k , $\frac{1}{k^3 + 3k^2 + 2k} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$

c) $\sum_{k \geq 2} \ln\left(\frac{k^2}{k^2 - 1}\right)$

d) $\sum_{k \geq 0} \frac{k}{(k+1)!}$

Séries géométriques - Séries géométriques dérivées

Calcul 26.4 — Séries géométriques dérivées.



Reconnaître chacune des séries suivantes, dire si elle converge, et le cas échéant calculer sa somme.

- a) $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{2^{2k}}$
- b) $\sum_{k \geq 1} e^{-(k-1)}$
- c) $\sum_{k \geq 1} k 2^k$
- d) $\sum_{k \geq 0} k \frac{1}{2^{k-1}}$

Calcul 26.5 — Séries géométriques dérivées – bis.



Reconnaître chacune des séries suivantes, dire si elle converge, et le cas échéant calculer sa somme.

- a) $\sum_{k \geq 1} k 2^{-k}$
- b) $\sum_{k \geq 1} (3k+1) \frac{1}{3^k}$
- c) $\sum_{k \geq 1} k(k-1) \frac{1}{2^{k-2}}$
- d) $\sum_{k \geq 2} k(k-1) e^{-(k-2)}$

Réponses mélangées

divergente	$\frac{1}{12}$	$\frac{11}{4}$	$\ln(2)$	$\frac{e}{e-1}$	$e^2 - 3$	$\frac{2e^3}{(e-1)^3}$	$\frac{1}{2 \times 3^9}$
divergente	$\frac{2}{2-\sqrt{2}}$	1	4	16	2	$e^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{4}$ 1

Algèbre linéaire

Prérequis

Coordonnées, Applications linéaires, Matrices, Rang.
A la suite du cours de 1ère année.

Vecteurs

Calcul 27.1



Pour chacun des calculs suivants, déterminer les coordonnées du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$.

a) $u = (1, 1)$, $\mathcal{B} = ((0, 1), (-1, 2))$

b) $u = (1, 1)$, $\mathcal{B} = ((-1, 2), (0, 1))$

c) $u = (3, 4)$, $\mathcal{B} = ((1, 2), (12, 13))$

d) $u = (1, 2, 1)$, $\mathcal{B} = ((0, 1, 3), (4, 5, 6), (-1, 0, 1))$

e) $u = (-1, 0, 1)$, $\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (1, 1, 1), (-1, -1, 3))$

Calculs de rangs

Calcul 27.2 — Sans calcul.



Déterminer le rang des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 13 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 5 & 20 & 5 & 20 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Calcul 27.3



Déterminer le rang des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Matrices et Applications linéaires

Calcul 27.4 — Matrices d'endomorphismes.



Pour les applications linéaires f et les bases $\mathcal{B}$ suivantes, déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

a) $f : (x, y) \mapsto (x + y, 3x - 5y)$, $\mathcal{B} = ((1, 0), (0, 1))$

b) $f : (x, y) \mapsto (x + y, 3x - 5y)$, $\mathcal{B} = ((0, 1), (1, 0))$

c) $f : (x, y) \mapsto (2x + y, x - y)$, $\mathcal{B} = ((1, 2), (3, 4))$

d) $f : (x, y, z) \mapsto (x + y, 3x - z, y)$, $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1))$

Calcul 27.5 — Matrices d'applications linéaires.



Pour les applications linéaires f et les bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ suivantes, déterminer la matrice de f de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

a) $f : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y)$, $\mathcal{B} = ((0, 1, 3), (4, 5, 6), (-1, 0, 1))$, $\mathcal{B}' = ((0, 1), (1, 0))$.

Réponses mélangées

$$\begin{array}{ccccccc}
 (3, -1) & (-1, 3) & 2 & 2 & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -19 & -43 \\ 9 & 21 \end{pmatrix} & 2 & 1 \\
 4 & \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 15 & 0 \end{pmatrix} & 3 & 2 & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} & 1 & \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
 (-2, 4/5, 11/5) & 2 & 1 & (-1, 1/2, 1/2) & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & & (9/11, 2/11)
 \end{array}$$

Réduction

Prérequis

Valeurs propres, vecteurs propres, diagonalisation
A la suite du cours de 2^{ième} année.

Valeurs propres

Calcul 28.1



Déterminer les valeurs propres de la matrice et préciser si la matrice est diagonalisable.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$

Calcul 28.2



Même question

a) $A = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -8 & -3 & 6 \\ -5 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 11 & 4 & -4 \\ -2 & 5 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Réponses mélangées

1 non 7, 5 1, 2, 3 non -1, 5 oui 1, 3, 2 oui
 1, -1, 3 oui 1, 3 oui 2, 4, 6 oui 1, 2 non