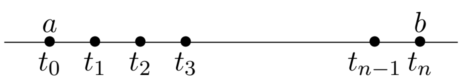
Méthode d'Euler

Introduction

Considérons une équation différentielle avec condition initiale de la forme $\begin{cases} y'(t) & = & F(y(t),t) \\ y(a) & = & c \end{cases}$ où F est une fonction à deux variables. Résoudre une telle équation différentielle veut dire trouver (si elles existent) toutes les fonctions y dérivables sur un intervalle I contenant a tel que $y(a) = c$ et pour tout $t \in I$, $y'(t) = F(y(t),t)$.

1. Donner la fonction F qui convient pour l'équation différentielle $y'(t) = y(t) + \mathrm{e}^t$
2. De même avec l'équation différentielle $y'(t) = y(t)$.

Pour F une fonction quelconque, on ne peut pas toujours résoudre cette équation différentielle. Pour cela, on va travailler numériquement, on va travailler sur le segment $[\,a\,;b\,]$ que l'on va découper en n intervalles de même longueur h (appelé pas) On note t_i le i-ième point de l'intervalle.



3. Que vaut le pas ? Pour $i \in [\![\,0\,;n\,]\!]$, exprimer t_{i+1} en fonction de t_i.
4. Écrire le développement limité à l'ordre 1 en t_i en fonction de F, t_i et $y(t_i)$:
$$y(x) \underset{x \to t_i}{=} \dots$$
5. En remplaçant x par t_{i+1} et en négligeant le o, donner la valeur de $y(t_{i+1})$ en fonction de $y(t_i)$, F et t_i.

Déterminer les $y(t_i)$ par cette méthode s'appelle la méthode d'Euler. Si on a la liste des temps t_0 jusqu'à t_n ainsi que la liste des $y(t_0)$ jusqu'à $y(t_n)$, alors on pourra afficher les points $(t_i, y(t_i))$ et les relier entre eux pour approximer la courbe de la vraie solution.

Un petit détour par une fonction bien connue

6. Programmer la méthode d'Euler pour le système $\begin{cases} y'(t) & = & y(t) \\ y(0) & = & 1 \end{cases}$ sur le segment $[\,0\,;x\,]$. Pour cela, on completra la fonction `EulerExp(x,N)` de sorte à ce qu'elle renvoie la liste des temps : $[t_0, t_1, \dots, t_n]$ (avec $t_0 = 0$ et $t_n = x$) et la liste des valeurs approximées de la solution : $[y(t_0), y(t_1), \dots, y(t_n)]$

```python
def EulerExp(x,n):
    h =      # pas de temps
    T = [0] # Liste des temps
    Y = [1] # Liste des valeurs y(t_i)
    for i in range(1,n+1):
        T.append(...)
        Y.append(...)
    return T,Y
```

7. Sur un graphique, afficher les points fournis par la fonction `EulerExp(1,10)` en bleu ainsi que la courbe $x \mapsto \mathrm{e}^x$ en rouge sur le segment $[\,0\,;1\,]$.

8. En effectuant la méthode d'Euler sur le segment $[\,0\,;x\,]$ et en utilisant la relation de récurrence entre $y(t_{i+1})$ et $y(t_i)$, déterminer la valeur de $y(t_n)$.

9. À l'aide de vos connaissances en mathématiques, justifier que $y(t_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} \mathrm{e}^x$ et que $y(t_n) \leqslant \mathrm{e}^x$.

Généralisation

10. Écrire une fonction `Euler(a,b,n,c,F)` qui renvoie les listes des temps et des valeurs de la fonction dans le cas de l'équation différentielle $\begin{cases} y'(t) & = & F(y(t),t) \\ y(a) & = & c \end{cases}$ sur le segment $[\,a\,;b\,]$ (toujours coupé en n intervalles), (ici, F est une fonction qui est ur paramètre d'une autre fonction).

11. Sur un même graphique, tracer, pour $c \in [\![\,-6\,;6\,]\!]$, l'approximation obtenue de la solution l'équation différentielle $y'(t) = t \times \cos(y(t))$ avec la condition initiale $y(0) = c$, on affichera les solutions sur l'intervalle $[\,0\,;5\,]$.

Système différentiel : Lokta-Volterra

Nous considérons deux espèces animales : l'une étant les proies de l'autre, modélisé par ce système différentiel :

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t)\Big(a - by(t)\Big) \\ y'(t) &= y(t)\Big(dx(t) - c\Big) \\ x(0) &= x_0 \\ y(0) &= y_0 \end{cases}$$

Dans ces équations, $x(t)$ désigne l'effectif des proies au temps t, $y(t)$ désigne l'effectif des prédateurs au temps t, a désigne le taux de reproduction des proies (sans les prédateurs), b le taux de mortalité des proies dus au prédateur, d le taux de reproduction des prédateurs et g le taux de mortalité naturel des prédateurs, x_0 (reps. y_0) désigne l'effectif des proies (resp. des prédateurs) à l'instant initial. On divise l'intervalle $[\,0\,;T_{\max}\,]$ en n intervalles réguliers, et t_i est le i-ème point de l'intervalle pour $i \in [\![\,0\,;n\,]\!]$.

12. Toujours à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 de x et de y à l'instant t_i, donner la valeur approchée de $x(t_{i+1})$ et $y(t_{i+1})$ en fonction de $x(t_i)$, $y(t_i)$ et des constantes.
13. Écrire une fonction `Lokta(a,b,c,d,x0,y0,Tmax,n)` qui renvoie trois listes T, X et Y, T étant la liste des temps t_0 jusqu'à t_n, X les valeurs $x(t_0)$, $x(t_1)$ jusqu'à $x(t_n)$ de même pour Y.
14. Sur une figure, tracer l'évolution des effectifs des proies et des prédateurs en fonction du temps.
15. Sur une nouvelle figure, tracer l'effectif des proies en fonction de celui des prédateurs.

Équation différentielle d'ordre 2

Considérons l'équation du pendule avec les conditions initiales :

$$\begin{cases} \theta'' + \omega^2 \sin(\theta) &= 0 \\ \theta(0) &= \theta_0 \\ \theta'(0) &= v_0 \end{cases}$$

Comme c'est une équation différentielle d'ordre 2, on pourrait penser que ce que l'on a fait précédemment ne fonctionne pas, pourtant si on pose $d = \theta'$, alors on obtient le système différentielle suivant :

$$\begin{cases} d' + \omega^2 \sin(\theta) &= 0 \\ \theta' &= d \\ \theta(0) &= \theta_0 \\ d(0) &= v_0 \end{cases}$$

Et on observe un système différentielle très proche de celui de Lokta-Volterra.

16. Écrire une fonction `Pendule(omega,theta0,v0,TMax,n)` qui renvoie la liste des temps de l'intervalle $[\,0\,;\mathrm{TMax}\,]$ et la liste des angles correspondants.
17. Afficher sur un graphe l'évolution de θ en fonction du temps, on essaiera plusieurs valeurs de `theta0` et `v0` (des petites et des grandes).

Suite de Conway

On considère, la suite définie par $u_0 = 1$, comme il y a un 1 dans u_0, on pose $u_1 = 11$, comme il y a deux 1 dans u_1, on pose $u_2 = 21$, puis $u_3 = 1211$, puis $u_4 = 111221$, $u_5 = 312211$ etc. Écrire une fonction `Conway(n)` qui renvoie u_n.