

Cahier de calcul

— réponses —



La suite de Fibonacci, définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Elle apparaît sous de nombreuses formes biologiques, comme la ramification des arbres, la disposition des feuilles sur une tige, les fruits de l'ananas, la floraison de l'artichaut, le déroulement des feuilles de fougères, la disposition d'une pomme de pin, la coquille de l'escargot et la disposition des nuages lors des ouragans. Quant aux marguerites, elles ont le plus souvent un nombre de pétales issu de la suite de Fibonacci.

Ce cahier de calcul est une adaptation pour les classes de BCPST d'un travail réalisé initialement pour l'ensemble des classes préparatoires.

Coordination

Colas BARDAVID

Équipe des participants

Vincent BAYLE, Romain BASSON, Olivier BERTRAND, Ménard BOURGADE, Julien BUREAUX, Alain CAMANES, Mathieu CHARLOT, Mathilde COLIN DE VERDIÈRE, Keven COMMAULT, Miguel CONCY, Rémy EUPHERTE, Hélène GROS, Audrey HECHNER, Florian HECHNER, Marie HÉZARD, Nicolas LAILLET, Valérie LE BLANC, Thierry LIMOGES, Quang-Thai NGO, Xavier PELLEGRIN, Fabien PELLEGRINI, Jean-Louis POURTIER, Valérie ROBERT, Jean-Pierre TÉCOURT, Guillaume TOMASINI, Marc TENTI

Adaptation BCPST

Carine COURANT, Elodie MAILLET

Remerciements

Nous remercions vivement l'équipe coordonnée par Colas BARDAVID pour avoir mis à disposition les sources du cahier initial.

Le pictogramme 🕒 de l'horloge a été créé par Ralf SCHMITZER (The Noun Project).

Sommaire

1. Fractions.....	1
2. Puissances.....	2
3. Calcul littéral.....	3
4. Racines carrées.....	4
5. Équations du second degré.....	5
6. Exponentielle et Logarithme.....	6
7. Trigonométrie.....	7
8. Dérivation.....	9
9. Primitives.....	10
10. Calcul d'intégrales.....	12
11. Intégration par parties.....	13
12. Changements de variable.....	14
13. Intégration des fractions rationnelles.....	15
14. Systèmes linéaires.....	16
15. Nombres complexes.....	17
16. Trigonométrie et nombres complexes.....	18
17. Sommes et produits.....	19
18. Coefficients binomiaux.....	20
19. Manipulation des fonctions usuelles.....	21
20. Suites numériques.....	22
21. Inégalités.....	23
22. Développements limités.....	24
23. Calcul matriciel.....	25
24. Équations différentielles.....	27
25. Fonctions de deux variables.....	28
26. Séries numériques.....	30
27. Algèbre linéaire.....	31
28. Réduction.....	32

Fiche n° 1. Fractions

Réponses

1.1 a) $\frac{4}{5}$

1.1 b) 2^5

1.1 c) 3

1.1 d) $-2 \times 3^{3k-2}$

1.2 a) $\frac{1}{6}$

1.2 b) $\frac{7}{15}$

1.2 c) 9

1.2 d) $\frac{1}{9}$

1.3 a) 247

1.3 b) $\frac{203}{24}$

1.3 c) $\frac{-10}{3}$

1.3 d) $1\,000$

1.4 $\frac{16}{35}$

1.5 a) $2\,022$

1.5 b) $\frac{1}{2}$

1.5 c) 1

1.5 d) 2

1.6 a) $\frac{-1}{n(n+1)^2}$

1.6 b) $-\frac{ab}{a-b}$

1.6 c) $\frac{3}{2}n$

1.7 $\frac{n^3+n}{n+1}$

1.8 a) $4 + \frac{5}{6}$

1.8 b) $1 + \frac{1}{k-1}$

1.8 c) $3 + \frac{5}{x-2}$

1.9 $2t$

1.10 a) $\frac{3}{5} > \frac{5}{9}$

1.10 b) $\frac{12}{11} > \frac{10}{12}$

1.10 c) $\frac{125}{25} = \frac{105}{21}$

1.11 Non

1.12 $A > B$

Fiche n° 2. Puissances

Réponses

2.1 a) 10^8

2.1 b) 10^{15}

2.1 c) 10^2

2.1 d) 10^{-2}

2.1 e) 10^4

2.1 f) 10^{-8}

2.2 a) 15^4

2.2 b) 5^{-6}

2.2 c) 2^7

2.2 d) $(-7)^{-2}$

2.2 e) 3^5

2.2 f) 3^{28}

2.3 a) $2^{-4} \cdot 3^{-1}$

2.3 b) $2^{21} \cdot 3$

2.3 c) 2

2.3 d) $2^{38} \cdot 3^{26}$

2.4 a) 8

2.4 b) 11

2.4 c) 3^{10}

2.4 d) $2^6 \cdot 5$

2.5 a) $\frac{x}{x+1}$

2.5 b) $\frac{1}{x-2}$

2.5 c) $\frac{2x}{x+1}$

2.5 d) $\frac{2}{x-2}$

Fiche n° 3. Calcul littéral

Réponses

3.1 a) $8x^3 - 6x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{8}$

3.1 b) $x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$

3.1 c) $x^5 - x^3 + x^2 - 1$

3.1 d) $x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1$

3.1 e) $x^5 - x^3 - x^2 + 1$

3.1 f) $x^4 + x^2 + 1$

3.2 a) $-2 + 12x - 17x^2 + 8x^3 - 3x^4$

3.2 b) $-28 + 21x$

3.2 c) $2 - x + x^3 - x^4 - x^5$

3.2 d) $-1 - 3x - 3x^2 + x^3$

3.2 e) $1 + x^4$

3.2 f) $1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4$

3.3 a) $-6(6x + 7)$

3.3 b) $4(5x + 4)(-5x + 1)$

3.3 c) $2(3x - 4)(10x + 3)$

3.3 d) $-8(x + 1)(x + 16)$

3.4 a) $(x - 1)^2$

3.4 b) $(x + 2)^2$

3.4 c) $(x + 1)(x + 2)$

3.4 d) $3\left(x + \frac{7 - \sqrt{37}}{6}\right)\left(x + \frac{7 + \sqrt{37}}{6}\right)$

3.4 e) $2\left(x + \frac{3 - \sqrt{233}}{4}\right)\left(x + \frac{3 + \sqrt{233}}{4}\right)$

3.4 f) $-5(x - 1)\left(x - \frac{1}{5}\right)$

3.5 a) $(x + y - z)(x + y + z)$

3.5 b) $(14x + 3y)(-12x + 3y)$

3.5 c) $(x + 1)(y + 1)$

3.5 d) $(x - 1)(y - 1)$

3.5 e) $(x + y)(x + 1)^2$

3.5 f) $(a^2 + b^2)(y - 4x^2)(y + 4x^2)$

3.6 a) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$

3.6 b) $-8(x^2 + 1)(x - 4)(x + 4)$

3.6 c) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

3.6 d) $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

3.6 e) $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2)$

Fiche n° 4. Racines carrées

Réponses

- 4.1 a) $\boxed{5}$
 4.1 b) $\boxed{\sqrt{3}-1}$
 4.1 c) $\boxed{-\sqrt{3}+2}$
 4.1 d) $\boxed{\sqrt{7}-2}$
 4.1 e) $\boxed{\pi-3}$
 4.1 f) $\boxed{|3-a|}$
 4.2 a) $\boxed{20}$
 4.2 b) $\boxed{9+4\sqrt{5}}$
 4.2 c) $\boxed{1+\sqrt{3}}$
 4.2 d) $\boxed{3+\sqrt{2}}$
 4.2 e) $\boxed{12\sqrt{7}}$
 4.2 f) $\boxed{12}$
 4.2 g) $\boxed{9-\frac{10}{3}\sqrt{2}}$
 4.2 h) $\boxed{10}$

- 4.3 a) $\boxed{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{6}}$
 4.3 b) $\boxed{3-2\sqrt{2}}$
 4.3 c) $\boxed{1-\sqrt{10}+\sqrt{15}}$
 4.3 d) $\boxed{\sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-2}$
 4.3 e) $\boxed{-(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$
 4.3 f) $\boxed{-\frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}}$
 4.3 g) $\boxed{2\sqrt{2}}$
 4.3 h) $\boxed{50-25\sqrt{3}}$
 4.4 $\boxed{\frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}}$
 4.5 a) $\boxed{\frac{x}{\sqrt{x-1}}}$
 4.5 b) $\boxed{x-\sqrt{x^2-1}}$

- 4.5 c) $\boxed{1+\sqrt{x-1}}$
 4.5 d) $\boxed{\frac{1}{2}\frac{1}{x-1}}$
 4.5 e) $\boxed{\frac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}}$
 4.5 f) $\boxed{-4(x-1)^2}$
 4.6 a) $\boxed{\sqrt{2}}$
 4.6 b) $\boxed{2\sqrt{2}}$
 4.7 a) $\boxed{-11+5\sqrt{5}}$
 4.7 b) $\boxed{1+\sqrt{2}}$
 4.7 c) $\boxed{1+\sqrt{2}}$
 4.7 d) $\boxed{\sqrt{3}}$
 4.7 e) $\boxed{1+\sqrt{5}}$
 4.7 f) $\boxed{\ln(1+\sqrt{2})}$
 4.8 $\boxed{1}$

Fiche n° 5. Équations du second degré

Réponses

- 5.1 a) $3, 3$
 5.1 b) $-1/3, -1/3$
 5.1 c) $2, -6$
 5.1 d) $2, 3$
 5.1 e) $0, \text{ donc } 5$
 5.1 f) $0, \text{ donc } -3/2$
 5.1 g) $\emptyset$
 5.1 h) $1 \text{ donc } -5$
 5.1 i) $1 \text{ donc } 8/3$
 5.1 j) $-1 \text{ donc } -19/5$
 5.2 a) $6, 7$
 5.2 b) $-3, -5$
 5.2 c) $-7, -11$
 5.2 d) $-3, 11$
 5.2 e) a, b
 5.2 f) $a - b, a + b$
 5.3 a) $2/3$
 5.3 b) $-2/7$
 5.3 c) $-1/m$
 5.3 d) $2m/(m + 3)$
 5.4 a) $1 \text{ donc } (a - b)/(b - c)$
 5.4 b) $1 \text{ donc } c(a - b)/(a(b - c))$

- 5.4 c) $m \text{ donc } -(m + a + b)$
 5.4 d) $m \text{ donc } m(a - b)/(b - c)$
 5.4 e) $m \text{ donc } ab/m$
 5.4 f) $a + b \text{ puis } 2ab/(a + b).$
 5.5 a) $x^2 - 22x + 117 = 0$
 5.5 b) $x^2 - 6x - 187 = 0$
 5.5 c) $x^2 - 4x + 1 = 0$
 5.5 d) $x^2 - 2mx + 3 = 0$
 5.5 e) $2x^2 - (4m + 1)x + (2m^2 + m - 15) = 0$
 5.5 f) $m^2x^2 + (m - 2m^2)x + (m^2 - m - 2) = 0$
 5.6 a) $m = -3/4 \text{ et } x = 3/4$
 5.6 b) ... $m = -1 \text{ et } x = -2, \text{ ou } m = 7 \text{ et } x = 2/3$
 5.6 c) $m = 1 \text{ et } x = -1 \text{ ou } m = -1 \text{ et } x = 1$
 5.7 a) $a = 2 \text{ et } b = 3$
 5.7 b) $a = -2 \text{ et } b = 1$
 5.7 c) $a = -3 \text{ et } b = 5$
 5.7 d) $a = 1/2 \text{ et } b = 8$
 5.7 e) $a = 1 \text{ et } b = 3\sqrt{7}$
 5.8 a) $] - \infty, 1] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$
 5.8 b) $[-3, 5]$
 5.8 c) $] - \infty, -1] \cup [2/3, +\infty[$
 5.8 d) $] - \infty, -1/2[\cup [4, +\infty[$

Fiche n° 6. Exponentielle et Logarithme

Réponses

6.1 a) $4 \ln 2$
 6.1 b) $9 \ln 2$
 6.1 c) $-3 \ln 2$
 6.1 d) $\frac{1}{2} \ln 2$
 6.1 e) $3 \ln 2$
 6.1 f) $2 \ln 2 + 2 \ln 3$
 6.2 a) $-\ln 3 - 2 \ln 2$
 6.2 b) $2 \ln 3 - 2 \ln 2$
 6.2 c) $\ln 3 + 11 \ln 2$
 6.2 d) $3 \ln 5 + 2 \ln 2$
 6.2 e) $-2 \ln 5 + 4 \ln 2$
 6.2 f) $2 \ln 5 - 2 \ln 2$
 6.3 $-2 \ln 2 - 2 \ln 5$
 6.4 a) $\frac{25}{8} \ln(\sqrt{2} - 1)$
 6.4 b) $17 + 12\sqrt{2}$
 6.4 c) 0
 6.4 d) 0
 6.5 a) 8

6.5 b) $\frac{1}{2}$
 6.5 c) $\frac{1}{3}$
 6.5 d) $\frac{1}{9}$
 6.5 e) $-\frac{1}{2}$
 6.5 f) $\frac{3}{2}$
 6.6 a) -2
 6.6 b) $\frac{1}{\ln 2}$
 6.6 c) -17
 6.6 d) 1
 6.6 e) -1
 6.6 f) e
 6.7 a) impaire
 6.7 b) impaire
 6.7 c) impaire
 6.7 d) impaire

6.8 a) $\mathbb{R}$
 6.8 b) ok
 6.8 c) 1
 6.8 d) -1
 6.9 a) $x + \ln 2$
 6.9 b) $\frac{e^x}{\sqrt{1+x}}$
 6.9 c) $\ln|x-1|$
 6.9 d) $-\frac{1}{1+x}$
 6.9 e) $e^{x \ln(1+x)}$
 6.10 a) $x \geq \frac{\ln 12 + 5}{3}$
 6.10 b) $x \in [0, 1[$
 6.10 c) $x \geq \frac{2}{e}$
 6.10 d) $x \geq -\frac{1}{12}$
 6.10 e) $\emptyset$
 6.10 f) $\frac{-13 - \sqrt{273}}{2}$

Fiche n° 7. Trigonométrie

Réponses

7.1 a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

7.1 b) $\frac{1}{2}$

7.1 c) 1

7.1 d) 1

7.1 e) -1

7.1 f) 0

7.1 g) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

7.1 h) $-\frac{1}{2}$

7.2 a) 0

7.2 b) 0

7.2 c) $-1 - \sqrt{3}$

7.2 d) 1

7.3 a) > 0

7.3 b) < 0

7.3 c) < 0

7.3 d) < 0

7.3 e) > 0

7.3 f) > 0

7.4 a) 0

7.4 b) $-\sin x$

7.4 c) $2 \cos x$

7.4 d) $-2 \cos x$

7.5 a) $\left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$

7.5 a) $\left\{ -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right\}$

7.5 a) $\left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

7.5 b) $\left\{ \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$

7.5 b) $\left\{ \frac{-2\pi}{3}, \frac{-\pi}{3} \right\}$

7.5 b) $\left\{ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

7.5 c) $\left\{ \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$

7.5 c) $\left\{ -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6} \right\}$

7.5 c) $\left\{ \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{11\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

7.5 d) $\left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}$

7.5 d) $\left\{ -\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right\}$

7.5 d) $\left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

7.5 e) $\left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$

7.5 e) $\left\{ -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}$

7.5 e) $\left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

7.5 f) $\left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \right\}$

7.5 f) $\left\{ -\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$

7.5 f) $\left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

7.5 g) $\left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{23\pi}{12} \right\}$

7.5 g) $\left\{ -\frac{11\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12} \right\}$

7.5 g) $\left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{11\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

7.5 h) $\left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2} \right\}$

7.5 h) $\left\{ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$

7.5 h) $\left\{ \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

7.5 i) $\left\{ \frac{\pi}{7}, \frac{13\pi}{7} \right\}$

7.5 i) $\left\{ -\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7} \right\}$

7.5 i) $\left\{ \frac{\pi}{7} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{7} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

7.5 j) $\left\{ \frac{5\pi}{14}, \frac{9\pi}{14} \right\}$

7.5 j) $\left\{ \frac{5\pi}{14}, \frac{9\pi}{14} \right\}$

7.5 j) $\left\{ \frac{5\pi}{14} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{9\pi}{14} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

7.6 a) $\left[0, \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi \right]$

7.6 a) $\left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$

7.6 b) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right]$

7.6 b) $\left[-\pi, -\frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi \right]$

7.6 c) $\left[0, \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi \right]$

7.6 c) $\left[-\pi, \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi \right]$

7.6 d) $\left[0, \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi \right]$

7.6 d) $\left[-\pi, -\frac{5\pi}{6} \right] \cup \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi \right]$

7.6 e) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right]$

7.6 e) $\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$

7.6 f) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4} \right]$

7.6 f) $\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2} \right] \cup \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right]$

7.6 g) $\left[0, \frac{3\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi \right]$

7.6 g) $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right]$

7.6 h) $\left[0, \frac{3\pi}{8} \right] \cup \left[\frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8} \right] \cup \left[\frac{15\pi}{8}, 2\pi \right]$

7.6 h) $\left[-\pi, -\frac{5\pi}{8} \right] \cup \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8} \right] \cup \left[\frac{7\pi}{8}, \pi \right]$

Fiche n° 8. Dérivation

Réponses

8.1 a) $6x^2 + 2x - 11$

8.1 b) $5x^4 - 6x^2 + 4x - 15$

8.1 c) $(2x^2 - 2x + 10) \exp(2x)$

8.1 d) $(6x - 1) \ln(x - 2) + \frac{3x^2 - x}{x - 2}$

8.2 a) $5(x^2 - 5x)^4(2x - 5)$

8.2 b) $4(2x^3 + 4x - 1)(3x^2 + 2)$

8.2 c) $8 \cos^2(x) - 6 \cos(x) \sin(x) - 4$

8.2 d) $-3(3 \cos(x) - \sin(x))^2(3 \sin(x) + \cos(x))$

8.3 a) $\frac{2x}{x^2 + 1}$

8.3 b) $\frac{1}{x \ln(x)}$

8.3 c) $(-2x^2 + 3x - 1) \exp(x^2 + x)$

8.3 d) $6 \cos(2x) \exp(3 \sin(2x))$

8.4 a) $\frac{6x}{(x^2 + 1)^2} \cos\left(\frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$

8.4 b) $\frac{2x^2 + 2x - 8}{(x^2 + 4)^2} \sin\left(\frac{2x + 1}{x^2 + 4}\right)$

8.4 c) $\frac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$

8.4 d) $\frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

8.5 a) $\frac{(2x + 3)(2 \sin(x) + 3) - (x^2 + 3x) \times 2 \cos(x)}{(2 \sin(x) + 3)^2}$

8.5 b) $\frac{2 - 3x}{2\sqrt{x}(3x + 2)^2}$

8.5 c) $-2 \frac{(x^2 + 1) \sin(2x + 1) + x \cos(2x + 1)}{(x^2 + 1)^2}$

8.5 d) $\frac{(4x + 3) \ln(x) - 2x - 3}{(\ln(x))^2}$

8.6 a) $2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

8.6 b) $\frac{9}{(9 - x^2)\sqrt{9 - x^2}}$

8.6 c) $\frac{1}{1 - x^2}$

8.6 d) $\frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x \sin(x)}$

8.7 a) $\frac{10x - 5}{(3 - x)^2(2 + x)^2}$

8.7 b) $\frac{2}{x + 1} \left(x + \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right) \left(x + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)$

8.7 c) $\frac{2x^2 + 2x + 5}{(x + 2)(x - 1)^2}$

8.7 d) $\frac{x^2}{(x + 1)^2}$

8.7 e) $\frac{2}{x(1 - \ln(x))^2}$

Fiche n° 9. Primitives

Réponses

9.1 a)	$\ln t + 1 $	9.4 f)	$\tan t - t$
9.1 b)	$-\frac{3}{t + 2}$	9.4 g)	$\frac{1}{2} \tan^2 t + \ln \cos t $
9.1 c)	$-\frac{3}{2(t + 2)^2}$	9.4 h)	$\frac{1}{4} \tan^4 t$
9.1 d)	$-\frac{\cos(4t)}{4}$	9.4 i)	$2\sqrt{\tan t}$
9.1 e)	$\frac{2}{3}(1 + t)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}$	9.4 j)	$-\frac{1}{\tan t}$
9.1 f)	$\frac{1}{2}e^{2t+1}$	9.4 k)	$\frac{1}{2} \frac{1}{(1 - \sin t)^2}$
9.2 a)	$\frac{2}{3} \ln 1 + t^3 $	9.4 l)	$\frac{1}{2} \text{Arctan}(2t)$
9.2 b)	$\frac{1}{6}(1 + 2t^2)^{\frac{3}{2}}$	9.4 m)	$\text{Arctan}(e^t)$
9.2 c)	$-\sqrt{1 - t^2}$	9.5 a)	$2(t - 1)$ puis $\frac{1}{3}t^3 - t^2 + 5t$
9.2 d)	$\frac{3}{4}(1 + 7t^2)^{\frac{2}{3}}$	9.5 b)	$-\frac{1}{t^2} \left(\frac{2}{t} + 1 \right)$ puis $-\frac{1}{t} + \ln t $
9.2 e)	$\frac{1}{6} \ln(1 + 3t^2)$	9.5 c)	$\frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{3}{t^4}$ puis $\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2t^2}$
9.2 f)	$-\frac{1}{(1 + 3t^2)^2}$	9.5 d)	$-\frac{4}{t^5} - \frac{3}{2} \frac{1}{t^{5/2}}$ puis $-\frac{1}{3} \frac{1}{t^3} - \frac{2}{\sqrt{t}}$
9.3 a)	$\frac{1}{4} \ln^4 t$	9.5 e)	$2e^{2t} - 3e^{-3t}$ puis $\frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{3}e^{-3t}$
9.3 b)	$2\sqrt{\ln t}$	9.5 f)	$3e^{3t-2}$ puis $\frac{1}{3}e^{3t-2}$
9.3 c)	$\frac{2}{(3 - e^{2t})^2}$	9.5 g)	$\cos t(3 \cos^2 t - 2)$ puis $-\frac{1}{3} \cos^3 t$
9.3 d)	$-\frac{2}{3t^{\frac{3}{2}}}$	9.5 h)	$-\frac{2t \sin \frac{1}{t} + \cos \frac{1}{t}}{t^4}$ puis $\cos \frac{1}{t}$
9.3 e)	$\ln 1 - e^{-t} + e^t $	9.5 i)	$\frac{2e^t}{(2 + e^t)^2}$ puis $\ln(2 + e^t)$
9.3 f)	$-e^{\frac{1}{t}}$	9.5 j)	$\frac{e^t(1 - e^{2t})}{(2 + e^t)^2}$ puis $\arctan(e^t)$
9.4 a)	$-\frac{1}{3} \cos^3 t$	9.5 k)	$\frac{2 \cos t + 3}{(2 + 3 \cos t)^2}$ puis $-\frac{1}{3} \ln 2 + 3 \cos t $
9.4 b)	$e^{\sin t}$	9.5 l)	$\frac{1}{(1 - t^2)^{3/2}}$ puis $-\sqrt{1 - t^2}$
9.4 c)	$-\ln \cos t $	9.5 m)	$(1 - 2t^2)e^{-t^2}$ puis $-\frac{1}{2}e^{-t^2}$
9.4 d)	$-\ln 1 - \sin t $		
9.4 e)	$-2 \cos \sqrt{t}$		

9.5 n) $\frac{\ln t - 2}{t^2}$ puis $\ln t - \frac{1}{2} \ln^2 t$

9.5 o) $-\frac{1 + \ln t}{t^2 \ln^2 t}$ puis $\ln |\ln t|$

9.5 p) $\frac{\cos \ln t - \sin \ln t}{t^2}$ puis $-\cos(\ln t)$

Fiche n° 10. Calcul d'intégrales

Réponses

10.1 a).....	Positif	10.3 e).....	$-\frac{1}{30}$	10.5 e).....	6	10.7 c).....	e^2
10.1 b).....	Négatif	10.3 f).....	$-\frac{2}{101}$	10.5 f).....	$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$	10.7 d).....	$3e - 4$
10.1 c).....	Positif	10.4 a).....	0	10.6 a).....	0	10.7 e).....	$-\frac{1}{3}$
10.2 a).....	14	10.4 b).....	1	10.6 b).....	0	10.7 f).....	$\frac{5}{8}$
10.2 b).....	50	10.4 c).....	$\frac{1}{2}$	10.6 c).....	$\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$	10.8 a).....	0
10.2 c).....	$\frac{147}{2}$	10.4 d).....	18	10.6 d).....	$\frac{1}{384}$	10.8 b).....	$\frac{\pi}{4}$
10.2 d).....	-54	10.4 e).....	$e^2 - e^{-3}$	10.6 e)...	$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$	10.8 c).....	$\frac{99}{\ln 10}$
10.2 e).....	0	10.4 f).....	$-\ln 3$	10.6 f).....	$\frac{7}{48}$	10.8 d).....	$\frac{e - \frac{1}{e}}{2}$
10.2 f).....	$\frac{5}{2}$	10.5 a).....	78	10.7 a)....	$\frac{1}{2} - \frac{1}{e+1}$	10.8 e).....	$\frac{2}{3}$
10.3 a).....	8	10.5 b).....	$2(e^3 - 1)$	10.7 b).....	$\frac{17}{2}$	10.8 f).....	$\frac{2\pi}{9}$
10.3 b).....	-2	10.5 c).....	$\frac{1}{\pi} \ln\left(1 + \frac{\pi}{2}\right)$				
10.3 c).....	$\frac{8}{3}$	10.5 d).....	$\frac{\sqrt{2}}{6}$				
10.3 d).....	0						

Fiche n° 11. Intégration par parties

Réponses

11.1 a) $\frac{\pi}{2} - 1$

11.1 b) $-\frac{5}{2}\cos(2) - \frac{1}{2}\sin(2) + \frac{3}{2}$

11.1 c) 4

11.1 d) $\frac{(\ln(2))^2 2^{\ln(2)} - 2 \ln(2) - 2^{\ln(2)} + 2}{(\ln(2))^2}$

11.1 e) 1

11.1 f) $2 \ln 2 - \frac{3}{4}$

11.1 g) $\ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$

11.1 h) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

11.1 i) $-\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{4}{3}$

11.1 j) $\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{16\sqrt{2}}{15}$

11.1 k) $\frac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2) - \frac{8}{9}\sqrt{2} + \frac{4}{9}$

11.1 l) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi^2}{32}$

11.2 a) $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (-x+2)e^x \end{cases}$

11.2 b) $\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{1+\ln x}{x} \end{cases}$

11.2 c) $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \end{cases}$

11.2 d) $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \sin(x) + \cos(x) \end{cases}$

11.3 a) $\frac{5}{2} - e^2$

11.3 b) $\frac{e^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}$

11.4 a) $\begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -x^2 \cos(x) + 2x \sin(x) + 2 \cos(x) - 2 \end{cases}$

11.4 b) $\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x \end{cases}$

11.4 c) $\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \left(\frac{1}{3} \ln^2 x - \frac{2}{9} \ln x + \frac{2}{27} \right) \end{cases}$

Fiche n° 12. Changements de variable

Réponses

12.1 a).....	$\frac{\pi}{2}$	12.2 d).....	$\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$
12.1 b).....	$\frac{\pi}{6}$	12.2 e).....	$\frac{\pi}{12}$
12.1 c).....	$\ln(\sqrt{2} + 1)$	12.2 f).....	$\frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}$
12.1 d).....	$\frac{1}{4}$	12.3 a).....	$2e^2$
12.1 e).....	$\frac{1}{12}$	12.3 b).....	$-2((\sqrt{3} - 1) \ln(\sqrt{3} - 1) - 4 + 2\sqrt{3})$
12.1 f).....	$2 \ln\left(\frac{3}{2}\right)$	12.4 a).....	$\begin{cases}]0, \frac{\pi}{2}[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \tan x + \ln \tan(x) \end{cases}$
12.2 a).....	$\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$	12.4 b).....	$\begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto 2 \arctan(\sqrt{e^x - 1}) \end{cases}$
12.2 b).....	$\frac{1}{2} \ln\left(\frac{2e + 1}{3}\right)$	12.4 c).....	$\begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{3}{2} \ln(x^{\frac{2}{3}} + 1) \end{cases}$
12.2 c).....	$\frac{\pi}{2}$	12.4 d).....	$\begin{cases}]1, +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \arctan \sqrt{x^2 - 1} \end{cases}$

Fiche n° 13. Intégration des fractions rationnelles

Réponses

13.1 a) $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

13.1 b) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{3}\right)$

13.2 a) $2\ln\frac{9}{10}$

13.2 b) $\ln(a+1)$

13.3 a) $\ln\left(\frac{7}{3}\right)$

13.3 b) $\ln\frac{33}{28}$

13.4 a) $\ln\left(2\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$

13.4 b) $\frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+1}{2}\right)$

13.5 a) $1 \text{ et } 2$

13.5 b) $A = -1 \text{ et } B = 1$

13.5 c) $2\ln\frac{4}{3}$

13.6 a) $\ln\frac{1}{3}$

13.6 b) $2\ln\frac{4}{3}$

13.6 c) $\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$

13.6 d) $\frac{1}{4}\ln\frac{1}{5}$

13.7 $\frac{1}{2\sqrt{a}}\ln\left(\frac{\sqrt{a}-a}{a+\sqrt{a}}\right)$

13.8 a) $\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$

13.9 a) $\frac{\pi}{4}$

13.9 b) $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$

13.10 $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

13.11 a) $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

13.11 b) $2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}$

13.11 c) .. $\sqrt{2}\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \sqrt{2}\frac{15}{16}$

13.11 d) $a\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^3}{4}$

13.12 a) $\frac{1}{2}$

13.12 b) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

13.12 c) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

13.12 d) $\ln(2)$

13.13 a) $\frac{\pi}{12}$

13.13 b) $\ln\left(\frac{a^2}{a^2-1}\right)$

Fiche n° 14. Systèmes linéaires

Réponses

14.1 a) $\{(3, 1)\}$

14.1 b) $\{(7, 2)\}$

14.1 c) $\left\{\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\}$

14.1 d) $\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$

14.2 a) $\left\{\left(1 - \frac{a}{4}, \frac{-1}{2} + \frac{3}{8}a\right)\right\}$

14.2 b) $(2, -3)$

14.2 c) $\left\{\left(\frac{1}{13}a + \frac{5}{13}a^2, \frac{2}{13}a - \frac{3}{13}a^2\right)\right\}$

14.2 d) $(a - 2a^2, a + a^2)$

14.3 a) $\{(1 + z, -z, z); z \in \mathbb{R}\}$

14.3 b) $\{(1, y, 3 + 2y); y \in \mathbb{R}\}$

14.3 c) $\left\{\left(\frac{13}{6} - \frac{5}{3}z, -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}z, z\right); z \in \mathbb{R}\right\}$

14.3 d) $\left\{\left(x, \frac{-5}{12} - \frac{3}{2}x, \frac{-25}{24} - \frac{7}{4}x\right); x \in \mathbb{R}\right\}$

Fiche n° 15. Nombres complexes

Réponses

15.1 a) $4 + 32i$

15.1 b) $13 - i$

15.1 c) $7 - 24i$

15.1 d) 5

15.1 e) .. $-119 + 120i$

15.1 f) $\frac{3}{10} + \frac{1}{10}i$

15.1 g) $\frac{4}{29} - \frac{19}{29}i$

15.1 h) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

15.2 a) 12

15.2 b) $8e^{i\pi}$

15.2 c) $\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$

15.2 d) $2e^{-i\frac{\pi}{2}}$

15.2 e) $2e^{i\frac{8\pi}{5}}$

15.2 f) $5e^{-\frac{\pi}{4}i}$

15.2 g) $10e^{-\frac{2\pi}{3}i}$

15.2 h) $2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$

15.3 a) 1

15.3 b) ... $\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$

15.3 c) .. $-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}$

Fiche n° 16. Trigonométrie et nombres complexes

Réponses

16.1 a) $\frac{1}{4} \cos(3x) + \frac{3}{4} \cos(x)$

16.1 b) $-\frac{1}{4} \cos(4x) + \frac{1}{2} \cos(2x) - \frac{1}{4}$

16.1 c) ... $-\frac{1}{8} \cos(6x) + \frac{1}{4} \cos(4x) - \frac{3}{8} \cos(2x) + \frac{1}{4}$

16.1 d) ... $-\frac{\sin(9x)}{8} + \frac{3\sin(5x)}{8} - \frac{\sin(3x)}{8} - \frac{3\sin(x)}{8}$

16.1 e) ... $\frac{\cos(9x)}{8} + \frac{3\cos(5x)}{8} + \frac{\cos(3x)}{8} + \frac{3\cos(x)}{8}$

16.1 f) $-\frac{1}{4} \sin(11x) + \frac{1}{4} \sin(5x) + \frac{1}{2} \sin(3x)$

16.2 a) $2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{\pi}{12}}$

16.2 b) $\left(-2 \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right) e^{-i\frac{5\pi}{12}}$

16.2 c) $2 \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{-\frac{7i\pi}{12}}$

16.2 d) $2 \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) e^{\frac{5i\pi}{12}}$

16.2 e) $2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{13\pi}{12}}$

16.2 f) $2 \sin\left(\frac{\pi}{24}\right) e^{-i\frac{11\pi}{24}}$

16.2 g) $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)} e^{\frac{13i\pi}{24}}$

16.2 h) $2^{27} \cos^{27}\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{\pi}{4}}$

16.3 a) $2 \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{5\pi}{12}}$

16.3 b) $2 \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) e^{i\frac{11\pi}{12}}$

16.4 a) $4 \cos^3(x) - 3 \cos(x)$

16.4 b) $4 \cos^3(x) \sin(x) - 4 \cos(x) \sin^3(x)$

16.5 a) $2 \cos(2x) \cos(x)$

16.5 b) $2 \cos(4x) \sin(x)$

16.5 c) $2 \sin(x) \sin(2x)$

16.5 d) $2 \sin(4x) \cos(x)$

16.6 a) $\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right) \sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

16.6 b) $\frac{\sin(8x)}{2 \sin(x)}$

16.6 c) 0

Fiche n° 17. Sommes et produits

Réponses

17.1 a) $\boxed{\frac{n(n+2)}{2}}$

17.1 b) $\boxed{\frac{7(n+1)(n+4)}{2}}$

17.1 c) $\boxed{\frac{n(5n+1)}{2}}$

17.1 d) $\boxed{\frac{(n-2)(n-7)}{6}}$

17.2 a) $\boxed{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}}$

17.2 b) ... $\boxed{n(n+1)(n^2+n+4)}$

17.2 c) $\boxed{\frac{9}{2}(3^{n-2}-1)}$

17.2 d) $\boxed{5^{n+1} \frac{1 - (\frac{2}{5})^{n+1}}{3}}$

17.2 e) ... $\boxed{\frac{7}{6}(7^n - 1) + n(n+4)}$

17.2 f) $\boxed{\frac{n+1}{2n}}$

17.3 a) $\boxed{2^{q-p+1}}$

17.3 b) $\boxed{3^{\frac{n(n+1)}{2}}}$

17.3 c) $\boxed{5^n (n!)^{\frac{3}{2}}}$

17.3 d) $\boxed{0}$

17.4 a) $\boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$

17.4 b) $\boxed{0}$

17.4 c) $\boxed{n2^{n+1} + 2(1-2^n)}$

17.4 d) $\boxed{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}$

17.5 a) $\boxed{(n+2)^3 - 2^3}$

17.5 b) $\boxed{\ln(n+1)}$

17.5 c) $\boxed{1 - \frac{1}{(n+1)!}}$

17.5 d) $\boxed{(n+1)! - 1}$

17.6 a) $\boxed{n+1}$

17.6 b) $\boxed{1-4n^2}$

17.6 c) $\boxed{\frac{1}{n}}$

17.6 d) $\boxed{\frac{n+1}{2n}}$

17.7 a) $\boxed{1 - \frac{1}{n+1}}$

17.7 b) $\boxed{\frac{1}{2} - \frac{1}{n+3}}$

17.8 a) $\boxed{2n^2 + n}$

17.8 b) $\boxed{\frac{n(3n+1)}{2}}$

17.9 a) $\boxed{\frac{n^2(n+1)}{2}}$

17.9 b) $\boxed{\frac{n(n+3)}{4}}$

17.9 c) $\boxed{\frac{n(n^2-1)}{2}}$

17.9 d) .. $\boxed{\frac{n(n+1)(7n^2+13n+4)}{12}}$

17.9 e) $\boxed{\frac{n(n+1)}{2} \ln(n!)}$

17.9 f) $\boxed{\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}}$

Fiche n° 18. Coefficients binomiaux

Réponses

18.1 a) $\boxed{10 \ 100}$

18.1 b) $\boxed{720}$

18.1 c) $\boxed{\frac{1}{30}}$

18.1 d) $\boxed{15}$

18.1 e) $\boxed{56}$

18.1 f) $\boxed{140}$

18.2 a) $\boxed{\frac{9!}{5!}}$

18.2 b) $\boxed{\binom{9}{4}}$

18.2 c) $\boxed{2^n \times n!}$

18.2 d) $\boxed{\frac{(2n+1)!}{2^n \times n!}}$

18.3 a) $\boxed{\frac{n(n-1)}{2}}$

18.3 b) $\boxed{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}$

18.3 c) $\boxed{\frac{k+1}{n-k}}$

18.3 d) $\boxed{(n+2)(n+1)}$

18.3 e) $\boxed{\frac{1}{(n+1)!}}$

18.3 f) $\boxed{\frac{n! \times (n-3)}{2^{2n+2}}}$

18.4 a) $\boxed{\frac{(n+1)^3}{n \times (n+2)!}}$

18.4 b) $\boxed{\frac{3(3n+2)(3n+1)}{a^3(n+1)^2}}$

18.5 a) $\boxed{3^n}$

18.5 b) $\boxed{0}$

18.5 c) $\boxed{6^n}$

18.5 d) $\boxed{12 \times 15^n}$

18.6 a) $\boxed{2 \times \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p}}$

18.6 b) $\boxed{2^{n-1}}$

18.7 a) $\boxed{2^n}$

18.7 b) $\boxed{n2^{n-1}}$

18.7 c) $\boxed{n(n+1)2^{n-2}}$

18.7 d) $\boxed{\frac{2^{n+1} - 1}{n+1}}$

18.8 a) $\boxed{\binom{2n}{n}}$

18.8 b) $\boxed{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2}$

18.8 c) $\boxed{\binom{2n}{n}}$

Fiche n° 19. Manipulation des fonctions usuelles

Réponses

19.1 a)	$\frac{\pi}{6}$	19.2 d)	$\frac{\ln(4)}{\ln(20/3)}$	19.4 d) .	$\left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ $\cup \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
19.1 b)	2			19.4 e)	$\left\{ \frac{1}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ $\cup \left\{ \pi - \frac{1}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
19.1 c)	$\frac{\pi}{4}$	19.3 a)	$\frac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}$	19.4 f)	1
19.1 d)	$\frac{\pi}{6}$	19.3 b)	$\left\{ 0; \frac{1}{2} \right\}$	19.5 a) ...	$x \mapsto \ln(2) \times 2^x + 2x$
19.1 e)	$\frac{\pi}{4}$	19.3 c)	$1 - \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$	19.5 b) .	$x \mapsto \frac{15^x \ln(3/5) + 3^x \ln(3)}{(5^x + 1)^2}$
19.1 f)	$\frac{\pi}{3}$	19.3 d)	$\frac{\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{\ln(3)}$	19.5 c)	$x \mapsto (\ln(x) + 1)x^x$
19.2 a)	$\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$	19.4 a)	1	19.5 d)	$x \mapsto \frac{1 - 2x \arctan(x)}{(x^2 + 1)^2}$
19.2 b)	1	19.4 b)	0	19.6 a)	$x \mapsto 0$
19.2 c)	$-\frac{\ln(3)}{\ln(2)}$	19.4 c)	$\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	19.6 b) ..	$x \mapsto (\ln(x) + 1)x^x e^{-x^2}$
				19.6 c)	$x \mapsto \arctan(x)$

Fiche n° 20. Suites numériques

Réponses

20.1 a) $\frac{12}{5}$

20.1 b) 8

20.1 c) $\frac{(2n+5) \cdot 2^{n+3}}{5}$

20.1 d) $\frac{3(2n+1) \cdot 2^{3n+2}}{5}$

20.2 a) 13

20.2 b) 29

20.3 a) 2

20.3 b) 2

20.4 a) 21

20.4 b) 10 000

20.4 c) 2 001

20.4 d) 10 201

20.5 a) $\frac{17}{24}$

20.5 b) $\frac{1}{24}$

20.6 a) $\frac{3}{512}$

20.6 b) $\frac{3069}{512}$

20.6 c) $\frac{3}{1\,024}$

20.6 d) $\frac{6141}{1024}$

20.7 a) $\frac{\pi\sqrt{5}}{5}$

20.7 b) $\frac{11\sqrt{5}}{25}$

20.8 a) $3^n + (-2)^n$

20.8 b) 211

20.9 a) ... $\frac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2}$

20.9 b) $2\sqrt{2}$

20.10 a) 257

20.10 b) 65 537

20.10 c) F_n

20.10 d) $F_{n+1} - 2$

20.10 e) $F_{n+1} + 2^{2^n+1}$

20.10 f) F_{n+2}

Fiche n° 21. Inégalités

Réponses

21.1 a)	☐ Vrai	21.4 e)	☐ Vrai
21.1 b)	☐ Faux	21.4 f)	☐ Faux
21.1 c)	☐ Vrai	21.4 g)	☐ Vrai
21.1 d)	☐ Faux	21.4 h)	☐ Vrai
21.1 e)	☐ Vrai	21.4 i)	☐ Vrai
21.1 f)	☐ Vrai	21.5 a)	☐ Faux
21.1 g)	☐ Faux	21.5 b)	☐ Faux
21.1 h)	☐ Faux	21.5 c)	☐ Faux
21.2 a)	☐ Vrai	21.5 d)	☐ Faux
21.2 b)	☐ Faux	21.5 e)	☐ Vrai
21.2 c)	☐ Vrai	21.6 a)	☐ Vrai
21.3 a)	☐ Faux	21.6 b)	☐ Vrai
21.3 b)	☐ Faux	21.6 c)	☐ Faux
21.3 c)	☐ Vrai	21.6 d)	☐ Vrai
21.3 d)	☐ Vrai	21.6 e)	☐ Vrai
21.4 a)	☐ Faux	21.7 a)	☐ Vrai
21.4 b)	☐ Vrai	21.7 b)	☐ Faux
21.4 c)	☐ Faux	21.7 c)	☐ Vrai
21.4 d)	☐ Vrai	21.7 d)	☐ Vrai

Fiche n° 22. Développements limités

Réponses

- 22.1 a) $3x - x^2 + \frac{x^3}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$
- 22.1 b) $x - \frac{3}{2}x^2 + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$
- 22.1 c) $-\frac{x^3}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^4)$
- 22.1 d) $x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o_{x \rightarrow 0}(x^4)$
- 22.2 a) $e - \frac{ex}{2} + \frac{11ex^2}{24} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$
- 22.2 b) $1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + o_{x \rightarrow 0}(x^4)$
- 22.2 c) $e \left(1 + x + x^2 - \frac{5}{6}x^3 \right) + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$
- 22.2 d) $1 - x + \frac{3}{2}(x-1)^2 + o_{x \rightarrow 1}((x-1)^2)$
- 22.3 a) $-\frac{1}{2x}$
- 22.3 b) $\frac{1}{x^2}$
- 22.3 c) $-\ln(x)$
- 22.3 d) $e^{-\frac{1}{2}}e^x$

Fiche n° 23. Calcul matriciel

Réponses

$$23.1 \text{ a)} \dots\dots\dots \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 9 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$23.1 \text{ b)} \dots\dots\dots \begin{pmatrix} -2 & -6 & -5 \\ 15 & -1 & 11 \\ 18 & -26 & -1 \end{pmatrix}$$

$$23.1 \text{ c)} \dots\dots\dots 17 \text{ (matrice } 1 \times 1)$$

$$23.1 \text{ d)} \dots\dots\dots \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 2 & 14 & -4 \\ -1 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$23.1 \text{ e)} \dots\dots\dots \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$23.1 \text{ f)} \dots\dots\dots \begin{pmatrix} -5 & 15 & 3 \end{pmatrix}$$

$$23.1 \text{ g)} \dots\dots\dots \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$23.1 \text{ h)} \dots\dots\dots \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$23.1 \text{ i)} \dots\dots\dots \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 7 & 49 & -14 \\ -2 & -14 & 4 \end{pmatrix}$$

$$23.2 \text{ a)} \dots\dots\dots \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$23.2 \text{ b)} \dots\dots\dots \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$23.2 \text{ c)} \dots\dots\dots \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$23.2 \text{ d)} \dots\dots\dots \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$23.2 \text{ e)} \dots\dots\dots \begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$$

$$23.2 \text{ f)} \dots\dots\dots \begin{pmatrix} 2^k & 3^k - 2^k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$$

$$23.2 \text{ g)} \dots\dots\dots \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

$$23.2 \text{ h)} \dots\dots\dots \begin{pmatrix} \cos(3\theta) & -\sin(3\theta) \\ \sin(3\theta) & \cos(3\theta) \end{pmatrix}$$

$$23.2 \text{ i)} \dots\dots\dots \begin{pmatrix} \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix}$$

$$23.2 \text{ j)} \dots\dots\dots \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & (n) & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix}$$

$$23.2 \text{ k)} \dots\dots\dots \begin{pmatrix} n^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & (n^2) & \vdots \\ n^2 & \cdots & n^2 \end{pmatrix}$$

$$23.2 \text{ l)} \dots\dots\dots n^{k-1}D$$

$$23.3 \text{ a)} \dots\dots\dots 2 \times 3^{j-i} \times 5^{i-1}$$

$$23.3 \text{ b)} \dots\dots\dots 2^{i+1}3^{j-i}(2^n - 1)$$

$$23.3 \text{ c)} \dots\dots\dots 2 \times 3^{i+j} \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right)$$

$$23.3 \text{ d)} \dots\dots\dots 2^{i-j} \binom{i-1}{j-1}$$

$$23.4 \text{ a)} \dots\dots\dots \frac{1}{2(\pi - e)} \begin{pmatrix} 2 & -e \\ -2 & \pi \end{pmatrix}$$

$$23.4 \text{ b)} \dots\dots\dots \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 - 2i \\ 1 & -1 + i \end{pmatrix}$$

$$23.4 \text{ c)} \dots\dots\dots \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$23.4 \text{ d)} \dots\dots\dots \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$23.4 \text{ e)} \dots\dots\dots \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 8 & 4 & -2 \\ -16 & -6 & 7 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$23.4 \text{ f)} \dots\dots\dots \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$23.4 \text{ g)} \dots\dots\dots \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 0 \\ 8 & -6 & 4 & 2 \\ -7 & 5 & -3 & -1 \\ -5 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$23.4 \text{ h)} \dots\dots\dots \text{Non inversible!}$$

$$\mathbf{23.4\ i)} \dots\dots\dots \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{23.5\ a)} \dots\dots\dots \boxed{\lambda \neq 1}$$

$$\mathbf{23.5\ b)} \dots\dots\dots \frac{1}{1-\lambda} \begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 2\lambda+2 & \lambda & -2\lambda-1 \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{23.5\ c)} \dots\dots\dots \boxed{\lambda \neq 1}$$

$$\mathbf{23.5\ d)} \dots\dots \frac{1}{1-\lambda} \begin{pmatrix} -1-\lambda+\lambda^2 & 1-\lambda & 2-\lambda \\ 1 & 0 & -1 \\ 1-\lambda^2 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

Fiche n° 24. Équations différentielles

Réponses

24.1 a) $x \mapsto 56e^{12x}$

24.1 b) $x \mapsto 6e^x - 1$

24.1 c) $x \mapsto \frac{8e^{3x} - 5}{3}$

24.1 d) $x \mapsto 9e^{2x} - 6$

24.2 a) $x \mapsto e^{(6-x)/5}$

24.2 b) $x \mapsto 1 - 2e^{-2x/7+2}$

24.2 c) $x \mapsto \left(\frac{6}{\sqrt{5}} + \pi \right) e^{\sqrt{5}x} - \frac{6}{\sqrt{5}}$

24.2 d) $x \mapsto \left(12 + \frac{2e}{\pi} \right) e^{\pi x - \pi^2} - \frac{2e}{\pi}$

24.3 a) $x \mapsto e^{2x}$

24.3 b) $x \mapsto e^x$

24.3 c) $x \mapsto 2e^{2x} - e^x$

24.3 d) $x \mapsto (2 - 3i)e^x + (3i - 1)e^{2x}$

24.4 a) $x \mapsto e^x$

24.4 b) $x \mapsto 7e^{-x} - 5e^{-2x}$

24.4 c) $x \mapsto \frac{4}{3}e^x - \frac{1}{3}e^{-2x}$

24.4 d) $x \mapsto (2 - x)e^x$

24.4 e) $x \mapsto (2 - x)e^{2-2x}$

24.5 a) $x \mapsto \cos x + 2 \sin x$

24.5 b) $x \mapsto e^{-x/2} \left(\cos \frac{\sqrt{3}x}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}x}{2} \right)$

24.5 c) $x \mapsto e^{-x} \sin(x)$

24.5 d) $x \mapsto e^x \left(\frac{-1 + i}{2} e^{2ix} + \frac{1 + i}{2} e^{-2ix} \right)$

Fiche n° 25. Fonctions de deux variables

Réponses

- 25.1 a) $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$
- 25.1 b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y \geq 0\} \setminus \{(0, 0)\}$
- 25.1 c) $\emptyset$
- 25.2 a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 5y^4 + x$
- 25.2 b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2y \cos(2xy - y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (2x - 1) \cos(2xy - y)$
- 25.2 c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (2xy, 2x)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x^2, -2y)$
- 25.2 d) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2}{1 + (2x + y)^2}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{1 + (2x + y)^2}$
- 25.3 a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\sin(x - y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \sin(x - y)$
- 25.3 b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos(e^{xy}) - xy \sin(e^{xy}) e^{xy}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x^2 \sin(e^{xy}) e^{xy}$
- 25.3 c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y x^{y-1}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \ln x$
- 25.3 d) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 y}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- 25.4 a) $\sin(2t)$
- 25.4 b) $\frac{2e^{4t} + e^{-2t}}{\sqrt{e^{4t} - e^{-2t}}}$
- 25.4 c) $-72 \cos(4t) - 46 \sin(4t)$
- 25.5 a) $\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial u}(u, v) = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c}\right) - \frac{1}{2c} \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c}\right)$
- 25.5 a) $\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial v}(u, v) = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c}\right) + \frac{1}{2c} \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c}\right)$
- 25.5 b) $\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial r}(r, \theta) = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$
- 25.5 b) $\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial \theta}(r, \theta) = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta)$
- 25.6 a) $(0, 0)$
- 25.6 b) $(0, 3)$
- 25.6 c) $(0, 0)$ et $(-1, -1)$.
- 25.6 d) $(0, 1)$ et $(0, e^{-2})$.

25.6 e) $(0, 0), (1, 1)$ et $(-1, -1)$.

Fiche n° 26. Séries numériques

Réponses

26.1 a).... $\boxed{\text{divergente}}$

26.1 b)..... $\boxed{2}$

26.1 c) $\boxed{\frac{2}{2 - \sqrt{2}}}$

26.1 d) $\boxed{\frac{1}{2 \times 3^9}}$

26.2 a)..... $\boxed{e}$

26.2 b)..... $\boxed{e^2 - 3}$

26.2 c)..... $\boxed{e^{\frac{1}{2}}}$

26.3 a)..... $\boxed{1}$

26.3 b) $\boxed{\frac{1}{4}}$

26.3 c) $\boxed{\ln(2)}$

26.3 d)..... $\boxed{1}$

26.4 a) $\boxed{\frac{1}{12}}$

26.4 b) $\boxed{\frac{e}{e - 1}}$

26.4 c).... $\boxed{\text{divergente}}$

26.4 d)..... $\boxed{4}$

26.5 a)..... $\boxed{2}$

26.5 b)..... $\boxed{\frac{11}{4}}$

26.5 c)..... $\boxed{16}$

26.5 d) $\boxed{\frac{2e^3}{(e - 1)^3}}$

Fiche n° 27. Algèbre linéaire

Réponses

27.1 a)..... $\boxed{(3, -1)}$

27.1 b)..... $\boxed{(-1, 3)}$

27.1 c)..... $\boxed{(9/11, 2/11)}$

27.1 d)..... $\boxed{(-2, 4/5, 11/5)}$

27.1 e)..... $\boxed{(-1, 1/2, 1/2)}$

27.2 a)..... $\boxed{2}$

27.2 b)..... $\boxed{1}$

27.2 c)..... $\boxed{1}$

27.2 d)..... $\boxed{2}$

27.2 e)..... $\boxed{2}$

27.2 f)..... $\boxed{1}$

27.3 a)..... $\boxed{2}$

27.3 b)..... $\boxed{2}$

27.3 c)..... $\boxed{3}$

27.3 d)..... $\boxed{4}$

27.4 a)..... $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}}$

27.4 b)..... $\boxed{\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$

27.4 c)..... $\boxed{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -19 & -43 \\ 9 & 21 \end{pmatrix}}$

27.4 d)..... $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

27.5 a)..... $\boxed{\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 15 & 0 \end{pmatrix}}$

Fiche n° 28. Réduction

Réponses

28.1 a)	1, -1, 3 oui	28.1 d)	-1, 5 oui	28.2 b)	1, 3, 2 oui
28.1 b)	1, 3 oui	28.1 e)	1 non	28.2 c)	7, 5
28.1 c)	1, 2, 3 non	28.2 a)	2, 4, 6 oui	28.2 d)	1, 2 non