

Devoir surveillé de mathématiques 1

Samedi 5 septembre 2026, durée : 2h

Calculatrice interdite. Pensez à encadrer les résultats et souligner les points clés. Si vous repérez une erreur dans le sujet, indiquez le sur votre copie et continuez normalement.

Exercice 1 : une convergence vers e

Une étude de fonction

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{\ln x}$.

1. Donner le domaine de définition de f .
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0?
3. La fonction f ainsi prolongée est-elle dérivable en 0?
4. Dresser le tableau de variation de f en y faisant apparaître les différentes limites ainsi que la valeur de $f(e)$

Une étude de suites

On se propose ici d'étudier la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction de la première partie.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $u_n \geq e$.
6. Si on suppose que $(u_n)_n$ converge quelles sont ses limites possibles?
7. Montrer que u converge et en déduire sa limite.
8. Montrer que pour tout $x \geq e$ on a $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$.
9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|u_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$.

Indication : On pourra penser au théorème des accroissements finis

10. Sachant que $4^5 > 100$ déterminer un entier n à partir duquel u_n est une valeur approchée de e à 10^{-12} près.

Exercice 2 autour de e

Irrationalité de e

Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes. On note e leur limite commune.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n! \cdot u_n < n! \cdot e < n! \cdot u_n + \frac{1}{n}.$$

3. Dans la suite on souhaite montrer que e est irrationnel, on propose de procéder par l'absurde, c'est à dire en supposant que $e = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
 - a. Montrer que $p \in \mathbb{N}$.
 - b. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! \cdot u_n \in \mathbb{N}$. Pour quelle valeur de n a-t-on $n!e \in \mathbb{N}$?
 - c. Aboutir à une contradiction en utilisant la question 2.

Une nouvelle définition de l'exponentielle

Dans cette partie, on souhaite démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x.$$

On pose donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ ainsi que la fonction $f_n(x) = e^x - P_n(x)$.

4. On va prouver le résultat dans un premier temps pour $x \in]-1, 1[$:
- a. Justifier la dérivabilité de f et donner une relation entre f'_n et f_{n-1} pour $n \geq 1$.
 - b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un réel c compris entre 0 et x tel que :

$$e^x - P_n(x) = x(e^c - P_{n-1}(c))$$

- c. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]-1, 1[$, $|e^x - P_n(x)| \leq e \cdot |x|^n$.
- d. Démontrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, $P_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x$

5. On va le prouver maintenant pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- a. Soit $n \in \mathbb{N}$, démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt$$

- b. A l'aide d'une récurrence, prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x - P_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$.
- c. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|e^x - P_n(x)| \leq \frac{|x|^n}{n!} |e^x - 1|$.
- d. Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x$.