

Correction DS 1

Exercice 1

Partie 1

- On a une fonction définie par un quotient donc le dénominateur ne doit pas s'annuler, c'est-à-dire $\ln(x) \neq 0$. Ceci est vrai sur le domaine de définition du logarithme privé de $\{1\}$ donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Le même raisonnement donne la dérivabilité de f sur $\mathcal{D}_f$.
- Par quotient de limites on obtient $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ on peut donc prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
- On calcule la limite du taux d'accroissement en 0 :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$$

Comme on obtient une limite finie la fonction est bien dérivable et $f'(0) = 0$. De plus la fonction est un quotient de fonctions dérivables sur $\mathcal{D}_f$ et dont le dénominateur ne s'y annule pas : elle est dérivable sur $\mathcal{D}_f$. Si $x \in \mathcal{D}_f$ on calcule

$$f'(x) = \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

- On utilise le signe de la dérivée pour déduire les variations de f .

$$f'(x) > 0 \iff \ln x - 1 > 0 \iff x > e$$

De plus on calcule par opération les trois limites

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	-		-	+
$f(x)$	0	$+\infty$	e	$+\infty$

- On vient de voir que la fonction f est continue sur $[0, 1[$ et qu'elle y est strictement décroissante. Par le théorème de la bijection monotone elle réalise une bijection entre $[0, 1[$ et $f([0, 1[) =]-\infty, 0]$.
- On va montrer que la fonction f n'est pas injective sur $[1, +\infty[$ en appliquant deux fois le théorème des valeurs intermédiaires. La fonction f est continue sur $]1, e[$ et prend ses valeurs dans $]e, +\infty[$, par le théorème des valeurs intermédiaires il existe donc un réel $\alpha_1 \in]1, e[$ tel que $f(\alpha_1) = e + 42 \in]e, +\infty[$. De même f est continue sur $]e, +\infty[$ et prend ses valeurs dans $]e, +\infty[$, il existe donc $\alpha_2 \in]e, +\infty[$ tel que $f(\alpha_2) = e + 42 \in]e, +\infty[$. On a bien montré qu'il existe $\alpha_1 < \alpha_2$ deux réels distincts ayant pour image tous deux $e + 42$.

Partie 2

- On le montre par récurrence. C'est vrai pour $n = 0$ car $e \simeq 2,7 \leq 3 = u_0$. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_n \geq e$. En regardant le tableau de variation de la question 4 on voit que f est croissante sur $[e, +\infty[$ ainsi $f(u_n) \geq f(e) = e$ et on a prouvé l'hérédité.
- On suppose que (u_n) converge vers une certaine limite ℓ alors $\lim u_{n+1} = \ell$ également. De plus comme $u_n \geq e$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ on obtient $\ell \geq e$ et comme f est continue sur $[e, +\infty[$ en passant à la limite dans l'équation $u_{n+1} = f(u_n)$ on obtient $\ell = f(\ell)$ c'est-à-dire $\ell = \frac{\ell}{\ln(\ell)}$. En divisant par ℓ (non nul) et en passant à l'inverse puis à l'exponentielle on trouve $\ell = e$.

9. On montre par récurrence que (u_n) est décroissante. Pour cela on va montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geq u_{n+1}$.

C'est vrai pour $n = 0$ car d'après l'énoncé $3 \geq u_1 = \frac{3}{\ln(3)} \simeq 2,73$. Supposons maintenant que pour un certain n on a bien l'inégalité $u_n \geq u_{n+1}$. Alors comme on a montré à la question 5 que tous les termes de la suite étaient supérieurs à e on regarde de nouveau le tableau de variation sur $[e, +\infty[$ où f est croissante. En l'appliquant à l'inégalité on obtient donc $f(u_n) \geq f(u_{n+1})$ c'est-à-dire $u_{n+1} \geq u_{n+2}$ et la propriété est donc bien héréditaire. Pour conclure il suffit de combiner nos résultats, nous avons une suite décroissante minorée par e elle est donc convergente. Par la question précédente elle converge vers e .

10. On a montré l'inégalité de gauche dans l'étude de fonction en première partie. Pour la deuxième on pose $X = \ln(x)$ pour $x \in [e, +\infty[$ et en reprenant l'expression de la dérivée de f on veut montrer que $\frac{X-1}{X^2} \leq \frac{1}{4}$ ce qui revient à montrer que $X^2 - 4X + 4 \geq 0$ ou encore $(X - 2)^2 \geq 0$ ce qui est toujours vrai donc l'inégalité est bien vérifiée.
11. De nouveau on propose une récurrence et l'initialisation est vérifiée car $|u_0 - e| \simeq 0,28 \leq \frac{1}{4^0} = 1$. On suppose maintenant que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ on ait $|u_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$. Comme f est continue sur $[e, u_n]$ et dérivable sur $]e, u_n[$ par le théorème des accroissements finis il existe $c \in]e, u_n[$ tel que

$$\frac{f(u_n) - f(e)}{u_n - e} = f'(c)$$

En passant aux valeurs absolues on obtient $|f(u_n) - f(e)| = |f'(c)| |u_n - e|$ puis en utilisant l'hypothèse de récurrence et le fait que $f(e) = e$ on obtient $|f(u_n) - e| \leq f'(c) \frac{1}{4^n}$. Finalement en remplaçant $f(u_n)$ par u_{n+1} et en utilisant la majoration de f' de la question précédente on obtient bien $|u_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4^{n+1}}$

12. On part de l'indication

$$4^5 > 1000 \iff \frac{1}{4^{-5}} < 10^{-3} \iff \frac{1}{4^{-20}} < 10^{-12}$$

En reprenant la question précédente on voit donc que $n = 20$ convient.

Exercice 2

Partie 1

1. On calcule pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} = \frac{n(n+1) + n - (n+1)(n+1)}{n(n+1)(n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$$

$$u_n - v_n = \frac{1}{n \cdot n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Les suites (u_n) et (v_n) sont croissante et décroissante respectivement et la limite de leur différence vaut 0 elle sont donc adjacentes.

2. Par propriété sur les suites adjacentes ((u_n) étant croissante et (v_n) décroissante) on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq e \leq v_n$ en multipliant par $n!$ on obtient l'inégalité demandée.
3. a. Comme les suites sont positives leur limite l'est également donc $p \in \mathbb{N}$.
- b. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ on sait que $\frac{n!}{k!} \in \mathbb{N}$ car $n! = n(n-1) \dots (k+1)k!$. Ainsi en distribuant $n!$ dans la somme $\sum \frac{1}{k!}$ on obtient une somme d'entiers et donc un entier.
- c. En prenant $n = q$ et en utilisant la double inégalité on obtient

$$q!u_q < q! \frac{p}{q} < q!u_q + \frac{1}{q}$$

On a alors $q!u_q$ et $q! \frac{p}{q}$ qui sont deux entiers mais $q! \frac{p}{q}$ est strictement contenu entre $q!u_q$ et $q!u_q + 1$: c'est absurde.

Partie 2

4. a. La fonction f_n est une somme d'un polynôme et de la fonction exponentielle est donc bien dérivable. On calcule pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f_n(x) = e^x - \sum_{k=1}^n \frac{kx^{k-1}}{k!} = e^x - \sum_{k=1}^n \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = e^x - \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{x^\ell}{\ell!} = e^x - f_{n-1}(x)$$

- b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction f_n est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$ donc par le théorème des accroissements finis il existe $c \in]0, x[$ tel que

$$\frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = f'_n(c) \quad \text{ce qui revient à écrire} \quad e^x - P_n(x) = xf_{n-1}(c) = x(e^c - P_{n-1}(c))$$

La preuve est identique si $x \in \mathbb{R}_-$.

- c. On prouve le résultat par récurrence. Attention ici on quantifie sur deux variables :

$$\mathcal{P}_n : \quad \forall x \in]-1, 1[\quad |e^x - P_n(x)| \leq e \cdot |x|^n$$

Si $n = 0$ on regarde pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$|e^x - P_0(x)| = e^x - 1 \leq e^x \leq e^1 = e|x|^0$$

Si maintenant l'inégalité est vraie un certain $n \in \mathbb{N}$ alors par ce qui précède pour tout $x \in]-1, 1[$ il existe un réel c entre 0 et x tel que

$$|e^x - P_{n+1}(x)| = |x(e^c - P_n(c))| = |x| \cdot |e^c - P_n(c)|$$

On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence pour c et on obtient

$$|e^c - P_n(c)| \leq e \cdot |c|^n$$

Comme $|c| \leq |x|$ on peut conclure :

$$|e^x - P_{n+1}(x)| \leq |x| \cdot e \cdot |x|^n = e \cdot |x|^{n+1}$$

- d. On reconnaît maintenant à droite de l'inégalité précédente une suite géométrique de raison inférieure à 1 en module elle converge donc vers 0. On applique donc le théorème des gendarmes pour obtenir que $|e^x - P_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et donc la convergence demandée.
5. a. Soit $x \in \mathbb{R}$ on va faire une intégration par partie avec les fonctions $u : x \mapsto -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ et $v : t \mapsto e^t$ qui sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$.

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t \right]_0^x - \int_0^x -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt$$

- b. Comme demandé on raisonne par récurrence. Si $n = 0$ et $x \in \mathbb{R}$ alors $e^x - P_0(x) = 1$ et

$$\int_0^x \frac{(x-t)^0}{0!} e^t dt = [e^t]_0^x = e^x - 1.$$

Supposons maintenant que la propriété soit vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors si $x \in \mathbb{R}$

$$e^x - P_{n+1}(x) = e^x - P_n(x) - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \stackrel{\text{H.R.}}{=} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \stackrel{?}{=} \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt$$

- c. Il ne reste plus qu'à majorer en utilisant l'inégalité triangulaire, on suppose ici $x \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned} |e^x - P_n(x)| &= \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \right| \leq \int_0^x \left| \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \right| dt \\ &\leq \frac{1}{n!} \int_0^x |x-t|^n e^t dt \\ &\leq \frac{x^n}{n!} \int_0^x e^t dt = \frac{x^n(e^x - 1)}{n!} \end{aligned}$$

La dernière inégalité ayant été obtenue car sur $[0, x]$ on a bien $|x - t| \leq |x|$.
 Pour $x \in \mathbb{R}_-$ c'est un peu plus pénible

$$e^x - P_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt = - \int_x^0 \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$$

On remarque que pour $t \in [x, 0]$ on a $x - t \leq 0$ et donc $|x - t| = t - x \leq |x|$ ainsi

$$|e^x - P_n(x)| = \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt \right| \leq \frac{|x|^n}{n!} \int_x^0 e^t dt = \frac{|x|^n (1 - e^x)}{n!} = \frac{|x|^n |e^x - 1|}{n!}$$

- d.** On conclut avec le théorème des gendarmes dans l'inégalité que l'on vient de montrer grâce à une croissance comparée ($x^n = o(n!)$).