

TD 1 - Séries

2 BCPST 2

Feuilles d'exercices

Année 2026- 2027

Exercice 1 : (♥ *Des séries simples*) Pour chacune de ces séries dire si elle converge ou non.

- 1) $\sum_{n \geq 1} \frac{5}{2n^2}$ 2) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$ 3) $\sum \frac{e^n - 1}{e^n + 1}$ 4) $\sum \pi^n$ 5) $\sum n^{-\frac{1}{2}}$ 6) $\sum 2^n \times 3^{-n}$
7) $\sum_{n \geq 1} \ln n$ 8) $\sum \cos n$ 9) $\sum \frac{1}{1+n^2}$ 10) $\sum_{n \geq 1} \tan\left(\frac{1}{n}\right)$ 11) $\sum_{n \geq 1} \sin(2^{-n})$
12) $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1$ 13) $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos n}{n^2}$ 14) $\sum e^{-n^2}$ 15) $\sum \frac{n+5^n}{8^n - n^2}$

Exercice 2 : (♥ *Des séries à calculer*) Justifier que les séries convergent et calculer leur somme :

- 1) $\sum \frac{1}{5^n}$ 2) $\sum e^{-2n}$ 3) $\sum \frac{1}{n!}$ 4) $\sum \frac{1}{(n+1)!}$ 5) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$
6) $\sum 3^{-2n+1}$ 7) $\sum n2^{-\frac{n}{2}}$ 8) $\sum \frac{2^{3n+1}}{(n+1)!}$ 9) $\sum \frac{e^n}{n!}$

Exercice 3 : (★ - ★★ *Des séries plus compliquées*) Etudier la convergence des séries ci-dessous.

- 1) $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\ln n}$ 2) $\sum \frac{\sqrt{n}}{n!}$ 3) $\sum e^{-\sqrt{n}}$ 4) $\sum \frac{n^4}{4^n}$ 5) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}!}$ 6) $\sum \frac{n!}{n^n}$
7) $\sum \arctan(n+1) - \arctan(n)$ 8) $\sum \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$ 9) $\sum \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$ 10) $\sum \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$

Exercice 4 : (★ - ★★ *D'autres séries à calculer*) Calculer la somme des séries suivantes :

- 1) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ 2) $\sum \frac{n}{(n+1)!}$ 3) $\sum \frac{n^2 2^n}{n!}$ 4) $\sum \frac{n^2(n-1)}{2^n}$.

Exercice 5 : (★★ *avec ch et sh*) On note $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Etudier la convergence de la série $\sum \text{ch}^\alpha n - \text{sh}^\alpha n$ en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 6 : (★ *Séries et puissances*) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite positive.

- 1) Si $\sum u_n$ converge, montrer que $\sum u_n^2$ converge.
2) Montrer que la réciproque n'est pas vraie.
3) Si $(u_n)_n$ est une suite réelle pas forcément positive, montrer que si $\sum u_n$ converge absolument alors $\sum u_n^2$ converge.

Exercice 7 : (★★ *Formule de Stirling*) L'objectif de cet exercice est de trouver un équivalent de $n!$.

On note $u_n = \frac{n! \cdot e^n}{n^n \sqrt{n}}$. On pose $v_n = \ln u_n$. 1) Montrer que la série de $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge.

2) En déduire que $(u_n)_n$ admet une limite notée $\ell > 0$.

3) Justifier que $n! \sim A \frac{n^n}{e^n} \sqrt{n}$, où $A > 0$ est une constante. 4) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \binom{2n}{n}$.

(Remarque : Le calcul de $A = \sqrt{2\pi}$ sera proposé dans un exercice (long) du chapitre sur les intégrales généralisées plus loin dans l'année.)

Exercice 8 : (★) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux séries positives telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$.

Montrer que $\sum u_n$ converge $\iff \sum v_n$ converge.

Exercice 9 : (★★ *des séries qui se complètent*)

- 1) Justifier que $\sum \frac{1}{(2n)!}$ et $\sum \frac{1}{(2n+1)!}$ convergent. On notera respectivement S_1 et S_2 leur somme.
2) Evaluer $S_1 + S_2$ et $S_1 - S_2$. En déduire la valeur de S_1 et de S_2 .

Exercice 10 : (★ *Constante d'Euler*) Pour $n \geq 1$ on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $u_n = H_n - \ln n$.

- 1) A l'aide d'un développement limité, donner un équivalent de $u_{n+1} - u_n$.
- 2) Etudier la convergence de $\sum (u_{n+1} - u_n)$.
- 3) En déduire que $(u_n)_n$ admet une limite notée γ (appelée constante d'Euler)

Exercice 11 : (★ *Utilisation de série*)

Dans cet exercice on veut trouver un équivalent de la suite définie par le terme général $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \ln(n!)$.

- 1) Ecrire u_n sous la forme de la somme partielle d'une série.
- 2) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2 \implies \int_{k-1}^k \ln t \, dt \leq \ln k \leq \int_k^{k+1} \ln t \, dt$.
- 3) En déduire un encadrement de u_n , puis que $u_n \sim n \ln n$.

Exercice 12 : (★★ *Critère de d'Alembert*) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement positive avec $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$

- 1) Montrer que si $\ell \in [0, 1[$, alors $\sum u_n$ converge.
- 2) Montrer que si $\ell > 1$ ou $\ell = +\infty$, $\sum u_n$ diverge.
- 3) En déduire la nature des séries $\sum \frac{x^n}{n!}$, $\sum \frac{n!}{n^n}$ et $\sum \binom{2n}{n}$.

Exercice 13 : (★★★ *Séries de Bertrand*) Dans cet exercice on s'intéresse à la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$. avec $\alpha, \beta > 0$, appelée "série de Bertrand".

- 1) A l'aide d'une comparaison à l'intégrale, montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
- 2) Montrer que pour $\alpha > 1$ la série de Bertrand converge et que pour $\alpha < 1$ la série de Bertrand diverge.
- 3) Pour $\alpha = 1$, utiliser la comparaison à une intégrale pour étudier la convergence de la série.

Exercice 14 : (★★★ *Séries et équivalents*) Soit $\sum u_n$ une série positive divergente de somme partielle notée S_n et $\sum v_n$ une série positive de somme partielle notée S'_n .

- 1) Si $u_n = o(v_n)$, montrer que $S_n = o(S'_n)$
- 2) Si $u_n \sim v_n$, montrer que $S_n \sim S'_n$.

Indication : revenir à la définition de la limite.

Exercice 15 : (★★ *Séries alternées - Exercice de type DS*)

Le théorème des Séries alternées dit que : Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante à terme strictement positifs telle que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors la série $\sum (-1)^n u_n$ converge.

- 1) Avec un exemple de suite $(u_n)_n$, montrer que généralement $\sum (-1)^n u_n$ ne converge pas absolument.
- 2) On va prouver le théorème et faire des applications : soit $(S_n)_n$ la somme partielle de la série $\sum (-1)^n u_n$.
 - 2.a) Justifier que les suites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont adjacentes.
 - 2.b) Conclure quant à la convergence de $\sum (-1)^n u_n$.
 - 2.c) Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est elle convergente ?
 - 2.d) Justifier que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n \cdot n}{(-1)^n + n\sqrt{n}}$ converge.

3) Montrons que sans l'hypothèse " $(u_n)_n$ décroissante", le théorème n'est plus valable en général.

On pose $\forall n \geq 1$, $v_{2n} = \frac{1}{n}$ et $v_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

- 3.a) Justifier que $(v_n)_n$ est à terme positifs et que $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, mais que $(v_n)_n$ n'est pas décroissante.
- 3.b) On pose $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k v_k$. Prouver que $S_{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{\sqrt{k}}$.
- 3.c) Montrer que $\sum (-1)^n v_n$ diverge.
- 4) Quelle est la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(-1)^n \sqrt{n} + n}$?