

TD 2 - Espaces Probabilisés

BCPST 1

Feuilles d'exercices

Année 2025- 2026

Exercice 1 : (★ le code de la route)

L'examen du code de la route se compose de 40 questions. Pour chaque question, on a le choix entre 4 réponses possibles. Une seule de ces réponses est correcte. Un candidat se présente à l'examen.

Il arrive qu'il connaisse la réponse à certaines questions. Il répond alors à coup sûr. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard entre les 4 réponses proposées.

On suppose toutes les questions indépendantes et que pour chacune de ces questions, la probabilité que le candidat connaisse la vraie réponse est p .

On note A_i , pour $1 \leq i \leq 40$, l'événement : "le candidat donne la bonne réponse à la i -ème question".

On note S la variable aléatoire égale au nombre total de bonnes réponses.

- 1) Calculer $\mathbb{P}(A_i)$ pour tout $1 \leq i \leq 40$.
- 2) Quelle est la loi de S ?
- 3) À quelle condition sur p le candidat donnera-t-il en moyenne au moins 36 bonnes réponses ?

Exercice 2 : (★) On lance un dé classique non pipé jusqu'à l'obtention d'un 6. Quelle est la probabilité d'obtenir uniquement des nombres pairs ?

Exercice 3 : (★) On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir deux fois de suite le même résultat. Quelle est la probabilité que l'on obtienne ne s'arrête jamais de lancer la pièce ?

Exercice 4 : (★) On muni la tribu $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ de la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{\lambda \cdot 3^n}{n!}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer λ .

Exercice 5 : (★) On muni la tribu $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ de la mesure de probabilité $\mathbb{P}$, on pose $p_n = \mathbb{P}(\{n\})$ définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ par $p_n = \frac{p_{n-1}}{3}$. 1) Calculer p_n . 2) Déterminer la probabilité de l'évènement défini par l'ensemble des entiers pairs non nuls.

Exercice 6 : (★) On muni la tribu $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ de la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.

Montrer que $\mathbb{P}(\{n\}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, puis que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{k\}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 7 : (★★) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_n$ une suite d'évènements mutuellement indépendants tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < \mathbb{P}(A_n) < 1$. Montrer que Ω est infini.

Exercice 8 : (★★) À tour de rôle, Dorimène joue avec une pièce dont la probabilité d'avoir pile est $p \in]0, 1[$, Cléanthis joue avec une pièce dont la probabilité d'avoir pile est $q \in]0, 1[$, Dorimène joue en première (et donc jouera tous les tours d'indice impairs, Cléanthis jouera tous les tours d'indice pairs), et on arrête le jeu dès qu'une des joueuses obtient pile.

- 1) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer la probabilité de l'évènement D_n : "Dorimène gagne au $2n + 1$ -ième tour".
- 2) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer la probabilité C_n : "Cléanthis gagne au $2n$ -ième tour".
- 3) Calculer la probabilité de C : "Cléanthis gagne la partie" et D : "Dorimène gagne la partie".
- 4) En déduire que l'évènement "le jeu s'arrête" est un évènement presque sûr.
- 5) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{P}(D) > \mathbb{P}(C)$.

Par exemple si Dorimène a une chance sur trois de faire pile alors que Cléanthis a une chance sur deux, laquelle a l'avantage ?

Exercice 9 : (★★ *Limite de l'union = l'union limite.*) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé

1) Dans un premier temps on considère que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'évènements de $\mathcal{A}$ croissante pour l'inclusion (c'est à dire $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n-1} \subset A_n$).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ et on pose $B_0 = A_0$.

. 1.a) Montrer que les évènements $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux à deux disjoints.

. 1.b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}(A_n)$. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$

. 1.c) Soit maintenant une suite d'évènement $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante pour l'inclusion.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n\right)$

2) On considère maintenant que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'évènements quelconques.

Prouver que $\lim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^n A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i\right)$ et $\lim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=0}^n A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=0}^{+\infty} A_i\right)$.

3) Applications concrètes :

. 3.a) On lance une pièce une infinité de fois, quelle est la probabilité d'obtenir au moins un pile ?

. 3.b) On dispose d'une urne, avec deux balles rouges et une blanche. On fait plusieurs tirages avec remise au hasard de balles dans l'urne. A chaque fois qu'une balle rouge est tirée, on la remet dedans en ajoutant en plus deux autres balles rouges. On tire des balles jusqu'à tirer la blanche, à ce moment là on s'arrête. Quelle est la probabilité qu'on s'arrête ?

Indication : On pourra utiliser la formule de Stirling prouvée au TD1 : $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$