Probabilité dans les espaces finis (révisions sup)

Exercice 1 (⋆ Mod)**.** Noah, élève en prépa, passe au tableau le premier jour de la rentrée. Puis s'il est passé au jour n, il passera au jour $n+1$ avec une probabilité de 0.8, par contre si au jour n il n'est pas passé, il passera au jour $n+1$ avec une probabilité de 0.4. On note p_n la probabilité que Noah passe le jour n. Que vaut la limite de $(p_n)_n$?

Exercice 2 (⋆⋆ Mod)**.** Une puce se déplace sur les sommets d'un triangle ABC. Elle commence au sommet A à l'instant 0, et saute à chaque instant sur un sommet différent de celui où elle est, de façon équiprobable. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité de l'événement E_n : «la puce revient au sommet A pour la première fois à l'instant n».

Exercice 3 (⋆⋆ Mod)**.** Une urne contient 15 boules : une noire, 5 blanches et 9 rouges.

1. On tire simultanément et au hasard trois boules de cette urne. Calculer la probabilité des événements suivants :
   - A : «le tirage est tricolore»
   - B : «parmi les boules tirées figurent exactement une noire et au moins une rouge»
   - C : «les trois boules tirées sont de la même couleur.»
2. On suppose désormais que le tirage s'effectue successivement avec remise. Déterminer les probabilités des événements A, B et C définis ci-dessus.

Exercice 4 (⋆⋆ Mod, Cal)**.** Soit un mobile qui se déplace sur les sommets d'un triangle A, B, C. À l'instant 0 le mobile se trouve en A. Ensuite les déplacements s'effectuent de la manière suivante : à l'instant n, le mobile se trouve à l'un des sommets. À l'instant $n+1$, il reste sur ce sommet avec une probabilité $1/5$, va sur l'un des deux sommets avec une probabilité de $2/5$ pour chacun des sommets. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'évènement A_n : «à l'instant n, le mobile se trouve en A», de même pour B_n et C_n, on pose $a_n = \mathbb{P}(A_n)$, $b_n = \mathbb{P}(B_n)$ et $c_n = \mathbb{P}(C_n)$ et $X_n = (a_n, b_n, c_n)^\top$.

1. Déterminer X_0.
2. Déterminer $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_{n+1} = MX_n$.
3. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer J^n pour $n \in \mathbb{N}$.
4. Écrire M comme une combinaison linéaire de J et de I_3.
5. En déduire l'expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
6. Quelles sont les limites des suites $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ et $(c_n)_n$?

Exercice 5 (⋆ Rai)**.** Sybille et Sibylle jouent aux fléchettes. Sybille étant entraînée, elle atteint la cible 9 fois sur 10. Sibylle est débutante et n'atteint la cible que 6 fois sur 10. Sybille effectue un tir sur trois.

1. Un tir est effectué. Quelle est la probabilité que la cible soit atteinte ?
2. Un tir est effectué et la cible est atteinte. Quelle est la probabilité que le tir ait été effectué par Sibylle ?

Exercice 6 (⋆ ⋆ ⋆ Rai ©)**.** Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilité, on suppose qu'il existe $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des évènements indépendants et que pour tout $k \in [\![1\,; n]\!]$, $0 < \mathbb{P}(A_k) < 1$, montrer que Ω contient au moins 2^n éléments.

Espaces probabilisés infinis

Exercice 7 (⋆ Rai)**.** Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $\mathbb{N}$ muni de la tribu $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\{n\}) = \lambda \dfrac{3^n}{n!}$, déterminer la valeur de λ.

Exercice 8 (⋆ Rai)**.** Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $\mathbb{N}$ muni de la tribu $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. On note $p_n = \mathbb{P}(\{n\})$ et on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \dfrac{p_{n-1}}{3}$.

1. Déterminer la valeur de p_n.
2. On note P l'évènement : «on a tiré un nombre pair» et I l'évènement : «on a tiré un nombre impair». Comparer $\mathbb{P}(P)$ et $\mathbb{P}(I)$.

Exercice 9 (⋆ ⋆ ⋆ Rai ©)**.** Considérons la biographie de Priscille en N caractères. Un singe immortel tape au clavier d'ordinateur des touches au hasard et de façon uniforme et indépendante et ce, indéfiniment. Démontrer qu'il est presque sûr que le singe finira par écrire cette biographie de Priscille. On précise qu'il y 100 caractères différents disponibles sur le clavier.

Exercice 10 (⋆⋆ Rai)**.** À tour de rôle, Julia joue avec une pièce dont la probabilité d'avoir pile est $p \in \,]0\,;1[$, Krystelle joue avec une pièce dont la probabilité d'avoir pile est $q \in \,]0\,;1[$, Julia joue en premier (et donc jouera tous les tours d'indice impairs), Krystelle jouera tous les tours d'indice pairs), et on arrête le jeu dès qu'une des joueuses obtient pile.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer la probibilité de l'évènement J_n : «Julia gagne au $2n+1$-ième tour».
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la probabilité K_n : «Krystelle gagne au $2n$-ième tour».
3. Calculer la probabilité des évènements K : «Krystelle gagne la partie» et J : «Julia gagne la partie».
4. En déduire que l'évènement le jeu s'arrête est un évènement presque sûr.
5. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{P}(J) > \mathbb{P}(K)$.

Exercice 11 ($\star\star$ Rec, Rai)**.** Soit $(A_n)_n$ une suite croissante d'évènements pour l'inclusion (pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$).

1. On pose $B_0 = A_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = A_n \backslash A_{n-1}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\bigcup\limits_{k=0}^{n} B_k = \bigcup\limits_{k=0}^{n} A_k$, $\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} B_k = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} A_k$ et que les B_n sont deux à deux disjoints.
2. En déduire que $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} A_k\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.
3. Soit $(C_n)_n$ une suite décroissante d'évènements pour l'inclusion (pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} \subset C_n$), montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{k=0}^{+\infty} C_k\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C_n)$.
4. Soit $(D_n)_n$ une suite d'évènements, montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} D_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} D_k\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} D_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} D_k\right)$$

Exercice 12 ($\star$ Rai ©)**.** Soit $\mathbb{P}$ une probabilité définie sur $\mathbb{N}$ muni de sa tribu $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. Démontrer que $\mathbb{P}(\{n\}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, puis montrer que $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{k\}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Exercice 13 ($\star\star$ Rai)**.** On dispose d'une infinité d'urnes numérotées dans $\mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il y a $3^n - 1$ boules bleues et une boule rouge. On suppose que la probabilité de choisir l'urne n est $\frac{4}{5^n}$. On choisit donc une urne au hasard, puis on tire une boule au hasard dans cette urne.

1. Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?
2. Sachant qu'on a tiré une boule bleu, quelle urne avait la plus grande probabilité d'avoir été choisie ?

Exercice 14 ($\star\star$ Rai ©)**.** On effectue une suite infinie de lancers d'une pièce équilibrée. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n la probabilité de l'évènement «au cours des n lancers, on n'a pas obtenu deux piles à la suite». Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note P_i l'évènement «on a obtenu pile lors du i-ième lancer»

1. Calculer p_1, p_2 et p_3.
2. Montrer que $(P_{n+1} \cap P_{n+2}, \overline{P_{n+1}} \cap P_{n+2}, \overline{P_{n+2}})$ est un système complet d'évènements.
3. En déduire que $p_{n+2} = \frac{1}{2} p_{n+1} + \frac{1}{4} p_n$
4. Déterminer la limite de $(p_n)_n$
5. Démontrer que la probabilité de ne jamais avoir obtenu deux piles consécutifs lors de la suite infinie de lancers vaut 0.