Correction TD 2 - Espaces Probabilisés

BCPST 1 Feuilles d'exercices Année 2025- 2026

Exercice 1 : *(★ le code de la route)*

L'examen du code de la route se compose de 40 questions. Pour chaque question, on a le choix entre 4 réponses possibles. Une seule de ces réponses est correcte. Un candidat se présente à l'examen.
Il arrive qu'il connaisse la réponse à certaines questions. Il répond alors à coup sûr. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard entre les 4 réponses proposées.
On suppose toutes les questions indépendantes et que pour chacune de ces questions, la probabilité que le candidat connaisse la vraie réponse est p.
On note A_i, pour $1 \leq i \leq 40$, l'événement : "le candidat donne la bonne réponse à la i-ème question".
On note S la variable aléatoire égale au nombre total de bonnes réponses.
1) Calculer $\mathbb{P}(A_i)$ pour tout $1 \leq i \leq 40$. **2)** Quelle est la loi de S ?
3) Á quelle condition sur p le candidat donnera-t-il en moyenne au moins 36 bonnes réponses ?

.....

Réponses :
1) On note B_i : "le candidat connait la réponse de la i-eme question". On a $\mathbb{P}(B_i) = p$ et d'après les proba totales :

$$\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(B_i)\mathbb{P}_{B_i}(A_i) + \mathbb{P}(\overline{B_i})\mathbb{P}_{\overline{B_i}}(A_i) = p \cdot 1 + (1-p) \cdot \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3p-1}{4}}.$$

2) S compte le nombre de succès parmi les A_i, les questions étant indépendantes, on a donc des expériences de Bernoulli indépendantes de paramètre $\frac{3p-1}{4}$. DE plus on a 40 questions, ainsi $\boxed{S \hookrightarrow \mathcal{B}\left(40, \frac{3p-1}{4}\right)}$

3) En moyenne on a $\mathbb{E}(S) = 40\frac{3p-1}{4}$ bonnes réponses.

On résout donc $40\frac{3p-1}{4} \geq 36 \iff 10 \cdot (3p-1) \geq 36 \iff 3p \geq \frac{13}{5} \iff \boxed{p \geq \frac{13}{15}}$

Exercice 2 : *(★)*

On lance un dé classique non pipé jusqu'à l'obtention d'un 6. Quelle est la probabilité d'obtenir uniquement des nombres pairs ?

.....

Réponse : On note D_n : "6 obtenu au lancer n". La famille $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'évènement.
De plus, $\mathbb{P}(D_n) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \frac{5^{n-1}}{6^n}$ (un succès avec 6 et $n-1$ échecs avec d'autres résultats que 6).
Notons E : "tous les lancers sont pairs". On a, d'après les proba totales :

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(D_n)\mathbb{P}_{D_n}(E) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^{n-1}}{6^n}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{6^n} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\frac{1}{1-1/3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} = \boxed{\frac{1}{4}}.$$

Exercice 3 : *(★)* On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir deux fois de suite le même résultat. Quelle est la probabilité que l'on obtienne ne s'arrête jamais de lancer la pièce ?

. . . . . .

Réponse : On pose E_n : "Les résultats alternent sur les n premiers lancers." On remarque que $E_{n+1} \subset E_n$. On cherche la probabilité de $p = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(E_n)$.

(note : ce passage manque légèrement de rigueur mathématique, on pourrait le rendre plus rigoureux en utilisant le résultat de la question 1b) de l'ex 9 et dire que pour $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$ on a bien $\mathbb{P}(E) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(E_n)$).

On a par équiprobabilité on a $\mathbb{P}(E_n) = \dfrac{2}{2^n}$ avec $\Omega = \{P, F\}^n$ et seulement deux issues de l'expérience favorables.

Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(E_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$ et donc la probabilité qu'on ne s'arrête jamais est nulle.

Exercice 4 : *(★)* On muni la tribu $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ de la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $\mathbb{P}(\{n\}) = \dfrac{\lambda \cdot 3^n}{n!}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer λ.

. . . . . .

Réponse :

On a $\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{n\}) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\lambda \cdot 3^n}{n!} = \lambda \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{3^n}{n!} = \lambda e^3$ Or $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ donc $\boxed{\lambda = e^{-3}}$.

Exercice 5 : *(★)* On muni la tribu $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ de la mesure de probabilité $\mathbb{P}$, on pose $p_n = P(\{n\})$ définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ par $p_n = \dfrac{p_{n-1}}{3}$. **1)** Calculer p_n.

2) Déterminer la probabilité de l'évènement défini par l'ensemble des entiers pairs non nuls.

. . . . . .

Réponse :

1) Remarquons que (p_n) est géométrique de raison $1/3$. Ainsi $p_n = \dfrac{p_0}{3^n}$.

De plus $\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{n\}) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{n\}) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{p_0}{3^n} = p_0 \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{3^n} = p_0 \dfrac{1}{1-1/3} = \dfrac{3p_0}{2}$

On en déduit $p_0 = \dfrac{2}{3}$ et donc $\boxed{p_n = \dfrac{1}{2 \cdot 3^{n-1}}.}$

2) On note E cet évènement, on a $\mathbb{P}(E) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} p_{2k} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2 \cdot 3^{2k-1}} = \dfrac{1}{6} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{9^k} = \dfrac{1}{6} \dfrac{1}{1-1/9} = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{9}{8} = \boxed{\dfrac{3}{16}}$.

Exercice 6 : *(★)* On muni la tribu $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ de la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.

Montrer que $\mathbb{P}(\{n\}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, puis que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{k\}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

.....

Réponse : La suite d'ensemble $(\{n\})_{n\in\mathbb{N}}$ forme une famille d'ensembles 2 à 2 disjoints, ainsi par propriété des probabilités, la série $\sum \mathbb{P}(\{n\})$ converge. On en déduit que $\boxed{\mathbb{P}(\{n\}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$ (sinon la série divergerait groessièrement !)

On a $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{k\}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\{k\}) - \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\{k\}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car la somme partielle converge vers la somme de la série.

Exercice 7 : *(★★)* Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_n$ une suite d'évènements mutuellement indépendants tels que $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ 0 < \mathbb{P}(A_n) < 1$. Montrer que Ω est infini.

.....

Réponse : Montrons d'abord que les A_i sont 2 à 2 distincts. Par l'absurde, si $A_i = A_j$ avec $i \neq j$, comme les évènements sont indépendants, on a $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A_i)^2$ et $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i \cap A_i) = \mathbb{P}(A_i)$
Donc $\mathbb{P}(A_i)^2 = \mathbb{P}(A_i) \implies \mathbb{P}(A_i) = 1$ ou $\mathbb{P}(A_i) = 0$ absurde car dans l'énoncé il est spécifié que $0 < \mathbb{P}(A_n) < 1$.

Supposons par l'absurde que Ω soit fini.
On a une infinité d'ensembles $(A_n)_n$ qui sont deux à deux distincts.
On rappelle qu'on note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω.
Or Si Ω était fini, on a $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^{\mathrm{Card}(\Omega)}$, le nombre de sous ensembles de Ω est donc fini. Il est impossible d'avoir une liste infinie d'ensemble deux à deux distincts.

Ainsi $\boxed{\Omega \text{ est infini.}}$

Exercice 8 : *(★★)* À tour de rôle, Dorimène joue avec une pièce dont la probabilité d'avoir pile est $p \in]0,1[$, Cléanthis joue avec une pièce dont la probabilité d'avoir pile est $q \in]0,1[$, Dorimène joue en première (et donc jouera tous les tours d'indice impairs, Cléanthis jouera tous les tours d'indice pairs), et on arrête le jeu dès qu'une des joueuses obtient pile.
1) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer la probibilité de l'évènement D_n : "Dorimène gagne au $2n+1-$ième tour".
2) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer la probabilité C_n : "Cléanthis gagne au $2n-$ième tour".
3) Calculer la probabilité de C : "Cléanthis gagne la partie" et D : "Dorimène gagne la partie".
4) En déduire que l'évènement "le jeu s'arrête" est un évènement presque sûr.
5) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{P}(D) > \mathbb{P}(C)$.
Par exemple si Dorimène a une chance sur trois de faire pile alors que Cléanthis a une chance sur deux, laquelle a l'avantage ?

.....

Réponse : **1)** On note P_i : "Pile est obtenu au tour $2i+1$ chez Dorimène"
et Q_i : "Pile est obtenu au tour $2i$ chez Cléantis". On a $D_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} \overline{P_i} \cap \bigcap_{i=1}^{n} \overline{Q_i} \cap P_n$

Par indépendance mutuelle on trouve, $\mathbb{P}(D_n) = \prod_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(\overline{P_i}) \cdot \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\overline{Q_i}) \cdot \mathbb{P}(P_n)$.

Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(D_n) = p(1-p)^n(1-q)^n}$

2) En suivant un raisonnement analogue on a $C_n = \bigcap_{i=0}^{n-1} \overline{P_i} \cap \bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{Q_i} \cap Q_n$

Donc $\boxed{\mathbb{P}(C_n) = q(1-p)^n(1-q)^{n-1}}$

3) On remarque que les ensembles $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux disjoints.
On a $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(D_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} p(1-p)^n(1-q)^n$
$= p\sum_{n=0}^{+\infty}((1-p)(1-q))^n = \dfrac{p}{1-(1-p)(1-q)} = \boxed{\dfrac{p}{p+q-pq}}$
De même, $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} C_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(C_n)$
$= \sum_{n=1}^{+\infty} q(1-p)^n(1-q)^{n-1} = \dfrac{q}{1-q}\sum_{n=1}^{+\infty}((1-p)(1-q))^n = \dfrac{q}{1-q}\cdot(1-p)(1-q)\cdot\dfrac{1}{p+q-pq} = \boxed{\dfrac{q(1-p)}{p+q-pq}}$
4) Les évènements D et C sont disjoints, donc
$\mathbb{P}(D\cup C) = \mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(C) = \dfrac{p+q(1-p)}{p+q-pq} = \dfrac{p+q-pq}{p+q-pq} = \boxed{1}$.
Ainsi L'évènement que le jeu s'arrête qui correspond à $D\cup C$ est presque sûr.

5) $\mathbb{P}(D) > \mathbb{P}(C) \iff \dfrac{p}{p+q-pq} > \dfrac{q(1-p)}{p+q-pq} \iff p > q(1-p) \iff \boxed{\dfrac{p}{1-p} > q}$.
Donc pour $p = 1/3$ et $q = 1/2$ on a $\dfrac{p}{1-p} = \dfrac{1/3}{2/3} = \dfrac{1}{2} = q$ donc $\boxed{\text{personne n'a d'avantage.}}$

Exercice 9 : *(★★ Limite de l'union = l'union limite.)* Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé

1) Dans un premier temps on considère que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'évènements de $\mathcal{A}$ croissante pour l'inclusion (c'est à dire $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ A_{n-1} \subset A_n$).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $B_n = A_n \backslash A_{n-1}$ et on pose $B_0 = A_0$.

. 1.a) Montrer que les évènements $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux disjoints.

. 1.b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}(A_n)$. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$

. 1.c) Soit maintenant une suite d'évènement $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante pour l'inclusion.

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n\right)$

2) On considère maintenant que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'évènements quelconques.

Prouver que $\lim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i\right)$ et $\lim_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=0}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=0}^{+\infty} A_i\right)$.

3) Applications concrètes :

. 3.a) On lance une pièce une infinité de fois, quelle est la probabilité d'obtenir au moins un pile ?

. 3.b) On dispose d'une urne, avec deux balles rouges et une blanche. On fait plusieurs tirages avec remise au hasard de balles dans l'urne. A chaque fois qu'une balle rouge est tirée, on la remet dedans en ajoutant en plus deux autres balles rouges. On tire des balles jusqu'à tirer la blanche, à ce moment là on s'arrête. Quelle est la probabilité qu'on s'arrête ?

Indication : *On pourra utiliser la formule de Stirling prouvée au TD1 :* $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

.....

Réponse : **1)** a) Soit $i \neq j$, supposons par exemple que $i < j$
(l'étude sera identique pour $i > j$ par symétrie).
On a $B_j = A_j \backslash A_{j-1}$ et $B_i = A_i \backslash A_{i-1} \subset A_i$. Or $j > i \implies j - 1 \geq i \implies A_i \subset A_{j-1} \implies A_i \cap B_j = \emptyset$.
On en déduit $B_i \cap B_j \subset A_i \cap B_j = \emptyset$ et donc $B_i \cap B_j = \emptyset$.

. 1.b) On a $\bigcup_{k=0}^{n} B_k = A_n$: on peut le prouver par récurrence.

Init : pour $n = 0$ c'est évident $\bigcup_{k=0}^{n} B_k = B_0 = A_0$.

Hered : Si c'est vrai au rang n, alors $\bigcup_{k=0}^{n+1} B_k = \bigcup_{k=0}^{n} B_k \cup B_{n+1} = A_n \cup (A_{n+1} \backslash A_n) = A_{n+1}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \bigcup_{k=0}^{n} B_k = A_n$. Les ensembles sont deux à deux disjoints donc : $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}(A_n)}$

En conséquence, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(B_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)}$.

Remarque : Pour être totalement rigoureux il faut prouver que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. On peut assez vite dire $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ car on a $B_n \subset A_n$ pour tout n.

Dans l'autre sens, on va prendre $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et on prend $i_0 = \min\{i \in \mathbb{N} \mid x \in A_i\}$. Le minimum existe car c'est un sous ensemble de $\mathbb{N}$ non vide et donc, on a $x \in A_{i_0}$ et $x \notin A_{i_0-1}$ ainsi, $x \in B_{i_0}$ et donc $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.

On a bien $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, donc $\boxed{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n}$

. 1.c) On a $C_n \subset C_{n-1} \implies \overline{C_{n-1}} \subset \overline{C_n}$ donc la suite $(\overline{C_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion.

Ainsi d'après la question précédente : $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(\overline{C_n}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{C_n}\right) \iff \lim_{n\to+\infty}(1-\mathbb{P}(C_n)) = \mathbb{P}\left(\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n}\right)$

$\iff 1 - \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C_n) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) \iff \boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n\right)}$.

2) La suite $\left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right)_n$ est croissante pour l'inclusion et $\left(\bigcap_{i=0}^{n} A_i\right)_n$ est décroissante pour l'inclusion.

Par ailleurs on peut montrer que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ par double inclusion, je vous le laisse c'est facile, il faut juste comprendre ce qu'on manipule.

Ainsi d'après les résultats de la question 1), on trouve :

$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \boxed{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)}$

et $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \boxed{= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)}$

3) a) On note E_n : "Au moins un pile a été obtenu en n lancers".

On veut la proba de $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ et on a $\mathbb{P}(E_n) = 1 - \mathbb{P}(\overline{E_n} = 1 - \frac{1}{2^n}$. De plus la suite d'évènements $(E_n)_n$ est croissante pour l'inclusion : on a $E_n \subset E_{n+1}$ Ainsi $\mathbb{P}(E) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(E_n) = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{2^n} = \boxed{1}$.

. 3.b) On note E_n : "en n tirages, n balles rouges on été tirées".

On cherche $\mathbb{P}(\overline{E})$ où $E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$. On a $E_{n+1} \subset E_n$ donc la suite d'évènements est décroissante. On pose R_i : "une balle rouge est tirée en i-eme" On a $\mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap \ldots \cap R_n) = \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}_{R_1}(R_2)\ldots\mathbb{P}_{R_1\cap\ldots\cap R_{n-1}}(R_n)$

$= \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\frac{2+2(n-1)}{3+2(n-1)} = \prod_{k=1}^{n}\frac{2+2(k-1)}{3+2(k-1)} = \prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1} = \frac{\left(\prod_{k=1}^{n} 2k\right)^2}{\prod_{k=1}^{2n+1} k} = \frac{\left(2^n\prod_{k=1}^{n} k\right)^2}{(2n+1)!} = \boxed{\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}}$

Ainsi d'après la formule de Stirling : $\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)(2n)!} \sim \frac{2^{2n}\frac{n^{2n}}{e^{2n}}2\pi n}{2n\cdot\frac{(2n)^{2n}}{e^{2n}}\sqrt{4\pi n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$