Correction TD 1 - Séries

BCPST 1 Feuilles d'exercices Année 2025- 2026

Exercice 1 : *(♡ Des séries simples)* Pour chacune de ces séries dire si elle converge ou non.

1) $\sum_{n\geq 1} \frac{5}{2n^2}$ **2)** $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$ **3)** $\sum \frac{e^n - 1}{e^n + 1}$ **4)** $\sum \pi^n$ **5)** $\sum n^{-\frac{1}{2}}$ **6)** $\sum 2^n \times 3^{-n}$

7) $\sum_{n\geq 1} \ln n$ **8)** $\sum \cos n$ **9)** $\sum \frac{1}{1+n^2}$ **10)** $\sum_{n\geq 1} \tan\left(\frac{1}{n}\right)$ **11)** $\sum_{n\geq 1} \sin(2^{-n})$

12) $\sum_{n\geq 1} \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1$ **13)** $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n}{n^2}$ **14)** $\sum e^{-n^2}$ **15)** $\sum \frac{n + 5^n}{8^n - n^2}$

. . . . . .

Réponses :

1) $\boxed{\text{CV}}$ car $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ CV et $\frac{5}{2n^2} = \frac{5}{2} \times \frac{1}{n^2}$ **2)** $\boxed{\text{DV}}$ car $\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ DV.

3) $\boxed{\text{DV}}$ grossièrement car $\frac{e^n - 1}{e^n + 1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. **4)** $\boxed{\text{DV}}$ grossièrement car $\pi > 1$.

5) $\boxed{\text{DV}}$ par comparaison car $n^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$ avec $\sum \frac{1}{n}$ qui DV

6) $\boxed{\text{CV}}$ car $2^n \times 3^{-n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ avec $\frac{2}{3} \in]-1, 1[$ **7)** $\boxed{\text{DV}}$ grossièrement car $\ln n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

8) $\boxed{\text{DV}}$ grossièrement car $\cos n$ ne tend pas vers 0 en $+\infty$. **9)** $\boxed{\text{CV}}$ car $\frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ avec $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ CV.

10) $\boxed{\text{DV}}$ car $\tan(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ avec $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ DV.

11) $\boxed{\text{CV}}$ car $\sin(2^{-n}) \sim 2^{-n}$ avec $\sum_{n\geq 1} 2^{-n}$ CV (série géométrique de raison 1/2)

12) $\boxed{\text{CV}}$ car $\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 \sim \frac{-2}{n^2}$ (DL de cos) et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ CV.

13) $\boxed{\text{CV}}$ car elle converge absolument. En effet, $\frac{|\cos n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ avec $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ CV.

14) $\boxed{\text{CV}}$ car $e^{-n^2} \leq e^{-n}$ et $\sum e^{-n}$ CV (série géométrique de raison $1/e$).

15) $\boxed{\text{CV}}$ $\frac{n + 5^n}{8^n - n^2} \sim \frac{5^n}{8^n} = \left(\frac{5}{8}\right)^n$ or $\sum \left(\frac{5}{8}\right)^n$ est une série géométrique qui converge.

Exercice 2 : *(♡ Des séries à calculer)* Justifier que les séries convergent et calculer leur somme :

1) $\sum \frac{1}{5^n}$ **2)** $\sum e^{-2n}$ **3)** $\sum \frac{1}{n!}$ **4)** $\sum \frac{1}{(n+1)!}$ **5)** $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$

6) $\sum 3^{-2n+1}$ **7)** $\sum n2^{-\frac{n}{2}}$ **8)** $\sum \frac{2^{3n+1}}{(n+1)!}$ **9)** $\sum \frac{e^n}{n!}$

. . . . . .

Réponses :

1) Série géométrique convergente car -1 < 1/5 <1. On a $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{5^k} = \frac{1}{1-1/5} = \frac{1}{4/5} = \boxed{\frac{5}{4}}$.

2) Série géométrique CV de raison $1/e^2 \in]-1,1[$. On a $\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-2n} = \frac{1}{1-1/e^2} = \boxed{\frac{e^2}{e^2-1}}$

3) Série exponentielle. $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1^k}{k!} = e^1 = \boxed{e}$.

4) là encore Série exponentielle : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} - 1 = e^1 - 1 = \boxed{e-1}$.

5) Elle converge par télescopage car $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{1}$.

6) Elle converge car Série géométrique de raison 1/9 :

$\sum_{k=0}^{+\infty} 3^{-2k+1} = 3\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3^2}\right)^k = 3 \cdot \frac{1}{1-1/9} = 3 \cdot \frac{1}{8/9} = \boxed{\frac{27}{8}}$.

7) On reconnait une série géométrique dérivée de raison $1/\sqrt{2}$ donc qui converge.

$\sum_{k=0}^{+\infty} k2^{-\frac{k}{2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} k\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{+\infty} k\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{(1-1/\sqrt{2})^2} = \frac{2}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^2} = \boxed{\frac{2}{3\sqrt{2}-4}}$.

8) On reconnait une série exponentielle, on fait le changement d'indice $k' = k+1$:

$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{3k+1}}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{3k-2}}{k!} = 2^{-2} \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{3k}}{k!} = \frac{1}{4} \cdot \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2^3)^k}{k!} - 1\right) = \boxed{\frac{e^8-1}{4}}$

9) On reconnait une série exponentielle, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^k}{k!} = \boxed{e^e}$

Exercice 3 : *(★ - ★★ Des séries plus compliquées)* Pour chacune de ces séries dire si elle converge ou non.

1) $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln n}$ **2)** $\sum \frac{\sqrt{n}}{n!}$ **3)** $\sum e^{-\sqrt{n}}$ **4)** $\sum \frac{n^4}{4^n}$ **5)** $\sum \frac{1}{\sqrt{n!}}$ **6)** $\sum \frac{n!}{n^n}$

7) $\sum \arctan(n+1)-\arctan(n)$ **8)** $\sum \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$ **9)** $\sum \sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}$ **10)** $\sum \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}$

Réponses :

1) On a $\forall n \geq 2$, $\ln n \leq n$ (on peut le prouver en étudiant le signe de la fonction $f(x) = \ln x - x$ avec un tableau de variation)

Ainsi $\forall n \geq 2$, $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\ln n}$. On a donc $\boxed{\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln n} \text{ divergente}}$ par comparaison à la série harmonique.

2) On a pour tout $n \geq 1$, $\frac{\sqrt{n}}{n!} \leq \frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$.

Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(n-1)!}$ converge, en effet si on revient aux sommes partielles, avec le changement d'indice $k' = k-1$

on trouve : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$. On a donc $\sum \frac{\sqrt{n}}{n!}$ qui converge par comparaison de séries à termes positif

3) On peut avoir l'intuition que ça converge parce que ça ressemble à une série géométrique, malheureusement la comparaison n'aide pas. En effet, $e^{-\sqrt{n}} \geq e^{-n}$...

A défaut, il faut comparer à quelque chose qui converge moins vite que $e^{-\sqrt{n}}$. On peut penser à $\frac{1}{n^2}$.

En effet, on a $n^2 e^{-\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées, donc à partir d'un certain rang N

on a $\forall n \geq N$, $n^2 e^{-\sqrt{n}} \leq 1 \implies \forall n \geq N$, $e^{-\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^2}$. Or $\sum_{n\geq N} \frac{1}{n^2}$ converge. Par comparaison on a donc $\sum_{n\geq N} e^{-\sqrt{n}}$ qui converge. $\boxed{\text{Donc } \sum e^{-\sqrt{n}} \text{ converge}}$.

4) Même principe que précédemment : on a par croissance comparée $n^2 \cdot \frac{n^4}{4^n} = \frac{n^6}{4^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc à partir d'un certain rang N,

on a $\forall n \geq N$, $n^2 \cdot \frac{n^4}{4^n} \leq 1 \implies \forall n \geq N$, $\frac{n^4}{4^n} \leq \frac{1}{n^2}$.

Par comparaison on a donc $\sum_{n\geq N} \frac{n^4}{4^n}$ qui converge. $\boxed{\text{Donc } \sum \frac{n^4}{4^n} \text{ converge}}$.

5) Même principe que précédemment : on a par croissance comparée $n^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{n!}} = \frac{n^2}{\sqrt{n!}} = \sqrt{\frac{n^4}{n!}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Donc à partir d'un certain rang N, on a $\forall n \geq N$, $\frac{n^2}{\sqrt{n!}} \leq 1 \implies \forall n \geq N$, $\frac{1}{\sqrt{n!}} \leq \frac{1}{n^2}$.

Par comparaison on a donc $\sum_{n\geq N} \frac{1}{\sqrt{n!}}$ qui converge. $\boxed{\text{Donc } \sum \frac{1}{\sqrt{n!}} \text{ converge}}$.

6) On majore $\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times \frac{3}{n} \times \ldots \times \frac{n}{n} \leq \frac{1}{n} \times \frac{2}{n} \times 1 \times \ldots \times 1 = \frac{2}{n^2}$.

On a $\sum \frac{2}{n^2}$ qui converge donc $\boxed{\sum \frac{n!}{n^n} \text{ converge}}$

7) D'après le théorème des acc finis sur la fonction arctan continue sur $[n, n+1]$ et dérivable sur $]n, n+1[$, on a $\exists c \in]n, n+1[\mid arctan'(c_n) = \frac{\arctan(n+1) - \arctan(n)}{(n+1) - n}$

On a donc $\arctan(n+1)-\arctan(n)=\dfrac{1}{1+c_n^2}$, or $n<c_n<n+1 \implies \dfrac{1}{1+n^2}>\dfrac{1}{c_n^2}>\dfrac{1}{1+(n+1)^2}$

Ainsi en particulier, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\arctan(n+1)-\arctan(n)\leq\dfrac{1}{1+n^2}$. De plus $\dfrac{1}{1+n^2}\sim\dfrac{1}{n^2}$. Donc $\displaystyle\sum\frac{1}{1+n^2}$ converge et donc $\boxed{\displaystyle\sum\arctan(n+1)-\arctan(n) \text{ converge}}$ par comparaison.

8) $\displaystyle\sum\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$. On a $\displaystyle\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)=\ln\left(1+\frac{2}{n^2+n-1}\right)\sim\frac{2}{n^2+n-1}\sim\frac{2}{n^2}$

donc $\boxed{\displaystyle\sum\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right) \text{ est une série convergente}}$ par équivalence.

9) $\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}=(n+1)^{1/n}-n^{1/n}=\exp\left(\dfrac{1}{n}\ln(n+1)\right)-\exp\left(\dfrac{1}{n}\ln n\right)$

$=\exp\left(\dfrac{1}{n}\ln n\right)\cdot\exp\left(\dfrac{1}{n}\ln(1+\dfrac{1}{n})\right)-\exp\left(\dfrac{1}{n}\ln n\right)=\exp\left(\dfrac{1}{n}\ln n\right)\left(\exp\left(\dfrac{1}{n^2}+o(\dfrac{1}{n^2})\right)-1\right)=n^{1/n}\cdot\left(1+\dfrac{1}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)-1\right)$

$=n^{1/n}\cdot\left(\dfrac{1}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)\sim\dfrac{n^{1/n}}{n^2}=\dfrac{1}{n^{2-1/n}}$

Pour $n\geq 2$, on a donc $2-\dfrac{1}{n}\geq 2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2} \implies n^{2-1/n}\geq n^{3/2} \implies \dfrac{1}{n^{2-1/n}}\leq\dfrac{1}{n^{3/2}}$.

Or $\displaystyle\sum\frac{1}{n^{3/2}}$. est une intégrale de Riemann convergente car $3/2>1$ et donc par comparaison, $\displaystyle\sum\frac{1}{n^{2-1/n}}$ est convergente.

Par équivalence, on a donc $\boxed{\displaystyle\sum\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n} \text{ convergente.}}$

10) $\left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}=\exp\left(\ln n\cdot\ln\left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)\right)=\exp\left(\ln n\cdot[\ln(1/2)+\ln\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)]\right)$

$=\exp(\ln n\cdot\ln(1/2))\cdot\exp\left(\ln n\cdot\ln\left(1+\dfrac{1}{n+2}\right)\right)$

Or $\ln n\cdot\ln\left(1+\dfrac{1}{n+2}\right)\sim\dfrac{\ln n}{n+2}\sim\dfrac{\ln n}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ par croissances comparées

donc $\exp\left(\ln n\cdot\ln\left(1+\dfrac{1}{n+2}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}e^0=1$.

Ainsi $\left(\dfrac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n}\sim\dfrac{1}{(\ln n)^{\ln 2}}\geq\dfrac{1}{\ln n}$ car $\ln 2\leq 1$.

On a montré à la question 1) que $\displaystyle\sum\frac{1}{\ln n}$ diverge, donc $\boxed{\displaystyle\sum\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{\ln n} \text{ diverge}}$ par comparaison.

Exercice 4 : *(★ - ★★)* Calculer la somme des séries suivantes :

1) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ **2)** $\sum \frac{n}{(n+1)!}$ **3)** $\sum \frac{n^2 2^n}{n!}$. **4)** $\sum \frac{n^2(n-1)}{2^n}$.

.....

Réponses :

1) Il y a un telescopage : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{1}$ donc la somme converge et vaut 1.

2) L'idée est de faire apparaitre la série exponentielle. on fait apparaitre $k+1$ en haut en écrivant $k = (k+1)-1$ et finalement on retrouve un telescopage.

$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{1}$ la somme converge et vaut 1.

3) On fait apparaitre des séries exponentielles.

On change les indices quand les termes sont nuls au début de la somme :

$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2 2^k}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2 2^k}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k2^k}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{[(k-1)+1]2^k}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)2^k}{(k-1)!} + \frac{2^k}{(k-1)!}$

$= \sum_{k=2}^{n} \frac{(k-1)2^k}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{(k-1)!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{2^k}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{2^{k+2}}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{k+1}}{k!} = 2^2 \sum_{k=0}^{n-2} \frac{2^k}{k!} + 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{k!}$

$\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 4e^2 + 2e^2 = \boxed{6e^2}$.

4) On peut faire apparaitre les séries dérivées successives d'ordre 2 et 3 :

$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2(k-1)}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k[(k-2)+2](k-1)}{2^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)(k-2)}{2^k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{2k(k-1)}{2^k}$

$= \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)(k-2)}{2^{k-3}} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)}{2^{k-2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{(1-1/2)^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-1/2)^2} = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{7^3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7^2} = \boxed{\frac{29}{7^3}}$.

Exercice 5 : *(★★ avec ch et sh)*

On note $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Etudier la convergence de la série $\sum \mathrm{ch}^\alpha n - \mathrm{sh}^\alpha n$ en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$.

.....

Note : si $\alpha = 0$, la suite est de terme constant nul, donc la série converge. Dans la suite on considère $\alpha \neq 0$

On va utiliser les DL :

$\mathrm{ch}^\alpha n - \mathrm{sh}^\alpha n = \left(\frac{e^n + e^{-n}}{2}\right)^\alpha - \left(\frac{e^n - e^{-n}}{2}\right)^\alpha = \frac{e^{\alpha n}}{2^\alpha}\left(\left(1 + e^{-2n}\right)^\alpha - \left(1 - e^{-2n}\right)^\alpha\right)$

$= \frac{e^{\alpha n}}{2^\alpha}\left(1 + \alpha e^{-2n} - 1 + \alpha e^{-2n} + o(e^{-2n})\right) = \frac{e^{\alpha n}}{2^\alpha} \cdot \left(2\alpha e^{-2n} + o(e^{-2n})\right) \sim \frac{\alpha e^{(\alpha-2)n}}{2^{\alpha-1}}$ car $\alpha \neq 0$.

Les termes sont bien de signe constant à partir d'un certain rang. Or $\sum e^{(\alpha-2)n}$ converge si et seulement si $\alpha - 2 < 0 \iff \alpha < 2$.

Donc $\boxed{\sum \mathrm{ch}^\alpha n - \mathrm{sh}^\alpha n \text{ converge si et seulement si } \alpha < 2}$.

Exercice 6 : *(★ Séries et puissances)* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive.

1) Si $\sum u_n$ converge, montrer que $\sum u_n^2$ converge.

2) Montrer que la réciproque n'est pas vraie.

3) Si $(u_n)_n$ est une suite réelle pas forcément positive, montrer que si $\sum u_n$ converge absolument alors $\sum u_n^2$ converge.

.....

Réponses :

1) On a $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$, on a $\forall n \geq N\ ,\ u_n \leq 1 \implies u_n^2 \leq u_n$.

Donc par comparaison, $\sum u_n$ converge $\implies \sum u_n^2$ converge.

2) $u_n = \dfrac{1}{n}$ est un contre-exemple. Car $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge et $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge.

3) D'après la question 1), on a $\sum |u_n|$ qui converge donc $\sum |u_n|^2$ converge. Or $|u_n|^2 = |u_n^2| = u_n^2$ car $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n^2 \geq 0$. donc $\sum u_n^2$ converge.

Exercice 7 : *(★ Constante d'Euler)* Pour $n \geq 1$ on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = H_n - \ln n$.

1) A l'aide d'un développement limité, donner un équivalent de $u_{n+1} - u_n$.

2) Etudier la convergence de $\sum (u_{n+1} - u_n)$.

3) En déduire que $(u_n)_n$ admet une limite notée γ (appelée constante d'Euler).

. . . . . .

Réponses :

1) $u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - \ln(n+1) - H_n + \ln n = H_{n+1} - H_n - (\ln(n+1) - \ln n) = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$= \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \boxed{\frac{1}{2n^2}}$.

2) On rappelle que $u_{n+1} - u_n \sim \frac{1}{2n^2}$ donne que $(u_{n+1} - u_n)_n$ et $(\frac{1}{2n^2})_n$ sont de même signe à partir d'un certain rang (en l'occurrence, $\sum \frac{1}{2n^2}$ est convergente donc $\sum u_{n+1} - u_n$ converge par équivalence.

3) La série converge, donc les sommes partielles convergent. Or ici, par telescopage

$S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} u_{k+1} - u_k = u_n - u_1 = u_n - 1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} S$

On a donc $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \gamma = S + 1$.

Exercice 8 : *(★★ Formule de Stirling)* L'objectif de cet exercice est de trouver un équivalent de $n!$.
On note $u_n = \dfrac{n! \cdot e^n}{n^n\sqrt{n}}$. On pose $v_n = \ln u_n$.

1) Montrer que la série de $\sum(v_{n+1} - v_n)$ converge.
2) En déduire que $(u_n)_n$ admet une limite notée $\ell > 0$.
3) Justifier que $n! \sim A\dfrac{n^n}{e^n}\sqrt{n}$, où $A > 0$ est une constante. **4)** En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \binom{2n}{n}$.
(Remarque : Le calcul de $A = \sqrt{2\pi}$ sera proposé dans un exercice (long) du chapitre sur les intégrales généralisées plus loin dans l'année.)

. . . . . .

Réponses :

1) Comme pour l'exercice précédent : $v_{n+1} - v_n = \ln u_{n+1} - \ln u_n = \ln \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ln\left(\dfrac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}} \cdot \dfrac{n^n\sqrt{n}}{n!e^n}\right)$
$= \ln\left(\dfrac{(n+1)\cdot e \cdot n^n\sqrt{n}}{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}\right) = \ln\left(\dfrac{e\cdot n^n}{(n+1)^n}\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\right) = \ln\left(e\cdot\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1/2}\right) = \ln e + \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$
$= 1 - \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = 1 - \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1 - \left(n+\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2n^2} + \dfrac{1}{3n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\right)$
$= 1 - 1 + \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{3n^2} - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{4n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right) = \boxed{\dfrac{1}{12n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)}$ On en déduit que $\boxed{v_{n+1} - v_n \sim \dfrac{1}{12n^2}}$ or $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{12n^2}$ converge donc $\sum v_{n+1} - v_n$ converge.

2) Comme pour l'exercice précédent, en revenant aux sommes partielles de la série $\sum v_{n+1} - v_n$:
$S_{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} v_{k+1} - v_k = v_n - v_1 = v_n - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$
On a donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_1 = S + 1$. On a donc $u_n = e^{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{\ell_1} = \ell > 0$ Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

3) D'après la question précédente, on a $\ell = e^{\ell_1} > 0$ donc :
$u_n \sim \ell \implies \dfrac{n!\cdot e^n}{n^n\sqrt{n}} \sim \ell \implies n! \sim \ell \cdot \dfrac{n^n}{e^n}\sqrt{n}$. On choisit donc $A = \ell > 0$.

4) D'après la formule de Stirling on a :
$\binom{2n}{n} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \dfrac{A(2n)^{2n}\sqrt{2n}}{e^{2n}}\left(\dfrac{e^n}{An^n\sqrt{n}}\right)^2 = \dfrac{A\cdot 2^{2n}\cdot n^{2n}\cdot\sqrt{2n}\cdot e^{2n}}{e^{2n}\cdot A^2\cdot n^{2n}\cdot n} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot 4^n}{A\cdot\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{2}}{A}\cdot\dfrac{4^n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par croissance comparées. On a donc $\boxed{\binom{2n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$.

Exercice 9 : *(★)* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux séries positives telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.
Montrer que $\sum u_n$ converge $\iff$ $\sum v_n$ converge.

.....

Réponses :
On a $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n} \sum \dfrac{u_n}{1} = u_n$. $v_n \sim u_n$ donne que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature.

Exercice 10 : *(★★ des séries qui se complètent)*
1) Justifier que $\sum \dfrac{1}{(2n)!}$ et $\sum \dfrac{1}{(2n+1)!}$ convergent. On notera respectivement S_1 et S_2 leur somme.
2) Evaluer $S_1 + S_2$ et $S_1 - S_2$. En déduire la valeur de S_1 et de S_2.

.....

Réponses :
1) $\dfrac{1}{(2n)!} \leq \dfrac{1}{n!}$ car $2n \geq n$ et de même $\dfrac{1}{(2n+1)!} \leq \dfrac{1}{n!}$. Donc les séries convergent pas comparaison.
2) En reconnaissant une décomposition paire/impaire on trouve $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$
Ainsi par unicité de la limite, on a $S_1 + S_2 = e$ (1). De même, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{-1}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

Ainsi par unicité de la limite, on a $S_1 - S_2 = e^{-1}$ (2).

Et donc en faisant (1) + (2) on trouve $2S_1 = e + e^{-1}$. Donc $\boxed{S_1 = \dfrac{e+e^{-1}}{2} = \mathrm{ch}(1)}$.

En faisant (1) − (2) on trouve $2S_2 = e - e^{-1}$. Donc $\boxed{S_2 = \dfrac{e-e^{-1}}{2} = \mathrm{sh}(1)}$.

Exercice 11 : *(★★★ Séries et équivalents)* Soit $\sum u_n$ une série positive divergente de somme partielle notée S_n et $\sum v_n$ une série positive de somme partielle notée S'_n.
1) Si $u_n = o(v_n)$, montrer que $S_n = o(S'_n)$ **2)** Si $u_n \sim v_n$, montrer que $S_n \sim S'_n$.
Indication : revenir à la définition de la limite.
.....

Réponses :
1) Commençons par remarquer que $u_n = o(v_n) \implies \dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$, on aura $\forall n \geq N$, $\dfrac{u_n}{v_n} < 1$ et donc $u_n < v_n$. La série $\sum u_n$ étant divergente, la série $\sum v_n$ diverge aussi par comparaison.
On s'intéresse à $\dfrac{S_n}{S'_n}$ dans le but de montrer que ça tend vers 0. On revient à la définition de la limite :
On veut montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N$, $\dfrac{S_n}{S'_n} < \varepsilon$.
On fixe donc $\varepsilon > 0$. On sait que $u_n = o(v_n) \implies \dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
D'après la définition de la limite : $\forall \varepsilon' > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N$, $\dfrac{u_n}{v_n} < \varepsilon'$.
On a donc pour tout $n \geq N$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{N-1} u_k + \sum_{k=N}^{n} u_k < S_{N-1} + \sum_{k=N}^{n} v_k = S_{N-1} + \varepsilon' \left(\sum_{k=0}^{n} v_k - \sum_{k=0}^{N-1} v_k \right)$.
C'est à dire : $S_n < S_{N-1} + \varepsilon' S'_n - \varepsilon' S'_{N-1} \implies \dfrac{S_n}{S'_n} < \dfrac{S_{N-1}}{S'_n} + \varepsilon' \dfrac{S'_{N-1}}{S'_n} + \varepsilon' < \dfrac{S_{N-1}}{S'_n} + \varepsilon' + \varepsilon'$ car (S'_n) est strictement croissante (série à termes positifs. On y est presque, reste à dire que S_{N-1} étant constante, et S'_n étant divergente on a $\dfrac{S_{N-1}}{S'_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc :
$\exists N' \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N'$, $\dfrac{S_{N-1}}{S'_n} < \varepsilon$.
Ainsi $\forall n \geq \max(N, N')$, $\dfrac{S_n}{S'_n} < \varepsilon' + \varepsilon' + \varepsilon' = 3\varepsilon'$.
Reste à dire que $\varepsilon' > 0$ a été choisit quelconque, donc on peut choisir $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{3}$. On choisit ensuite le rang $N'' = \max(N, N')$. On a alors gagné, en effet $\forall n \geq N''$, $\dfrac{S_n}{S'_n} < \varepsilon$.
Donc $\dfrac{S_n}{S'_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\boxed{S_n = o(S'_n)}$.

2) Quand on a fait la question précédente, ça coule de source. En effet, on a $u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = o(v_n)$
(Rappel $u_n \sim v_n \iff \dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \iff \dfrac{u_n}{v_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \iff \dfrac{u_n - v_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \iff u_n - v_n = o(v_n)$)
D'après la question précédente on a donc $S_n - S'_n = o(S'_n)$. Cela équivaut à dire $\boxed{S_n \sim S'_n}$.

Exercice 12 : *(★ Utilisation de série)*

Dans cet exercice on veut trouver un équivalent de la suite définie par le terme général $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n = \ln(n!)$.

1) Ecrire u_n sous la forme de la somme partielle d'une série.

2) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}\ ,\ k \geq 2 \implies \displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln t\ \mathrm{d}t \leq \ln k \leq \int_{k}^{k+1} \ln t\ \mathrm{d}t$.

3) En déduire un encadrement de u_n, puis que $u_n \sim n \ln n$.

.....

Réponses : **1)** On a $\ln(n!) = \ln\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln k$

2) On a $\forall k \geq 2\ ,\ \forall t \in [k-1, k]\ ,\ \ln t \leq \ln k$ et $\forall t \in [k, k+1]\ ,\ \ln k \leq \ln t$.

Donc $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln t\ \mathrm{d}t \leq \int_{k-1}^{k} \ln k\ \mathrm{d}t = \ln k$ et $\displaystyle\int_{k}^{k+1} \ln k\ \mathrm{d}t = \ln k \leq \int_{k}^{k+1} \ln t\ \mathrm{d}t$.

Ainsi $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln t\ \mathrm{d}t \leq \ln k \leq \int_{k}^{k+1} \ln t\ \mathrm{d}t$

3) On a $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \ln t\ \mathrm{d}t \leq \sum_{k=2}^{n} \ln k \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k}^{k+1} \ln t\ \mathrm{d}t$

Ainsi $\displaystyle\int_{1}^{n} \ln t\ \mathrm{d}t \leq \sum_{k=1^*}^{n} \ln k \leq \int_{2}^{n+1} \ln t\ \mathrm{d}t$ par relation de Chasles (* car $\ln 1 = 0$)

$\iff \left[\, t\ln t - t \,\right]_1^n \leq u_n \leq \left[\, t\ln t - t \,\right]_2^{n+1}$

$\iff n\ln n - n + 1 \leq u_n \leq (n+1)\ln(n+1) - n - 1 - 2\ln 2 + 2$

$\iff \dfrac{n\ln n - n + 1}{n\ln n} \leq \dfrac{u_n}{n\ln n} \leq \dfrac{(n+1)\ln(n+1) - n - 2\ln 2 + 1}{n\ln n}$

Or $\dfrac{n\ln n - n + 1}{n\ln n} \sim \dfrac{n\ln}{n\ln n} = 1.$

et $\dfrac{(n+1)\ln(n+1) - n - 2\ln 2 + 1}{n\ln n} \sim \dfrac{(n+1)\ln(n+1)}{n\ln n} \sim \dfrac{n\ln(n+1)}{n\ln n} = \dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} \sim \dfrac{\ln n}{\ln n} = 1$

car $n+1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $n+1 \sim n \implies \ln(n+1) \sim \ln n$.

On a donc par encadrement $\dfrac{u_n}{n\ln n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc $\boxed{u_n \sim n\ln n}$.

Exercice 13 : *(★★ Séries alternées)*

Le théorème des Séries alternées dit que : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante à terme strictement positifs telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors la série $\sum(-1)^n u_n$ converge.

1) Avec un exemple de suite $(u_n)_n$, montrer que généralement $\sum(-1)^n u_n$ ne converge pas absolument.

2) On va prouver le théorème et faire des applications : on pose $(S_n)_n$ la somme partielle de la série $\sum u_n$.

. 2.a) Justifier que les suites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont adjacentes.

. 2.b) Conclure quant à la convergence de $\sum(-1)^n u_n$.

. 2.c) Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est elle convergente ?

. 2.d) Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n \cdot n}{(-1)^n + n\sqrt{n}}$ converge.

3) Montrons que sans l'hypothèse "$(u_n)_n$ décroissante", le théorème n'est plus valable en général.

On pose $\forall n \geq 1$, $v_{2n} = \dfrac{1}{n}$ et $v_{2n-1} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

. 3.a) Justifier que $(v_n)_n$ est à terme positifs et que $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, mais que $(v_n)_n$ n'est pas décroissante.

. 3.b) On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k v_k$. Prouver que $S_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{\sqrt{k}}$.

. 3.c) Montrer que $\sum(-1)^n v_n$ diverge.

4) Quelle est la nature de $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{(-1)^n\sqrt{n}+n}$?

.....

Réponses : **1)** On prend $u_n = \dfrac{1}{n}$, alors $|\dfrac{(-1)^n}{n}| = \dfrac{1}{n}$ est le terme d'une série divergente. Pourtant u_n est bien décroissante, positive et tend vers 0

. 1.a) En simplifiant les sommes, on a $S_{2(n+1)} - S_{2n} = S_{2n+2} - S_{2n} = (-1)^{2n+2}u_{2n+2} + (-1)^{2n+1}u_{2n+1} = u_{2n+2} - u_{2n+1} \geq 0$ car (u_n) est décroissante. Ainsi $\boxed{(S_{2n}) \text{ est croissante.}}$

De même on a $S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = S_{2n+3} - S_{2n} = (-1)^{2n+3}u_{2n+3} + (-1)^{2n+2}u_{2n+2} = -u_{2n+3} + u_{2n+2} \leq 0$ car (u_n) est décroissante. Ainsi $\boxed{(S_{2n+1}) \text{ est décroissante.}}$

Par ailleurs $S_{2n+1} - S_2n = (-1)^{2n+1}u_{2n+1} = -u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi $\boxed{S_{2n+1} - S_2n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$.

$\boxed{\text{Les suites } (S_{2n})_n \text{ et } (S_{2n+1})_n \text{ sont donc bien adjacentes.}}$

. 1.b) Par théorème des suites adjacentes, on a (S_{2n}) et (S_{2n+1}) qui convergent vers la même limite. Or ces suites sont les termes pairs et impairs de la suite (S_n). D'après le cours, cette limite est donc aussi celle de (S_n). On en déduit que (S_n) converge. Donc $\boxed{\sum u_n \text{ converge.}}$

D'après les questions précédentes, la série est convergente à partir du moment où la suite de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ est décroissante. C'est à dire pour $\alpha > 0$. Si $\alpha \leq 0$, alors u_n ne tend pas vers 0 et donc $(-1)^n u_n$ diverge, la série diverge grossièrement. Ainsi $\boxed{\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 0.}$

. 1.c) On pose $u_n = \dfrac{n}{(-1)^n + n\sqrt{n}}$.

On remarque que $\forall n \geq 2, (-1)^n + n\sqrt{n} > 0$ donc $(u_n)_{n\geq 2}$ est une suite à terme positifs.

De plus $u_n \sim \dfrac{n}{n\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On a enfin $u_n = \dfrac{1}{(-1)^n/n + \sqrt{n}}$. On va poser $v_n = \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{(-1)^n}{n} + \sqrt{n}$ et étudier la monotonie de $(v_n)_n$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \sqrt{n+1} - \frac{(-1)^n}{n} + \sqrt{n} = (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right) + \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

Ainsi $v_{n+1} - v_n \geq \sqrt{n+1} - \sqrt{n} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right)$ Pour déterminer le signe de cela, on peut faire une étude de fonction. On peut aussi faire un DL : $\sqrt{n+1} = \sqrt{n} \cdot \sqrt{1+1/n} = \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2n} + o(1/n)\right) = \sqrt{n} + \frac{\sqrt{n}}{2n} + o(\sqrt{n}/n)$

$\frac{1}{1+n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+1/n} = \frac{1}{n}(1 + o(1)) = \frac{1}{n} + o(1/n)$

Donc $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right) = \sqrt{n} \cdot \frac{1}{2n} - \frac{2}{n} + o\left(\frac{\sqrt{n}}{n}\right) = \frac{1}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Ce qui compte c'est le signe. En l'occurrence positif. Donc à partir d'un certain rang, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right)$ est positif. Donc $(v_n)_n$ est croissante à partir d'un certain rang.

Donc $(u_n)_n$ est décroissante à partir d'un certain rang. Ainsi $\sum u_n$ converge car elle remplit les critère des séries alternées.

. 1.d) Les termes pairs et impairs de (v_n) sont tous positifs, la suite est donc bien positive.

De plus $v_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $v_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ on a donc $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour les mêmes raisons que la question 2.b)

Par ailleurs $v_{2n+1} - v_{2n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{n} = \frac{n - \sqrt{n+1}}{n\sqrt{n+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 0$ donc $v_{2n+1} - v_{2n} \geq 0$ à partir d'un certain rang.

Et $v_{2n} - v_{2n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n} - n}{n\sqrt{n}} \sim -\frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0$ donc $v_{2n} - v_{2n-1} \leq 0$ à partir d'un certain rang.

En conclusion, le signe de $v_{n+1} - v_n$ dépendra de la parité de n à partir d'un certain rang. (v_n) n'est donc pas décroissante.

. 1.e) On sépare les termes pairs/impairs de la somme :

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k v_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{2k} v_{2k} + (-1)^{2k-1} v_{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} v_{2k} - v_{2k-1} = \boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{\sqrt{k}}}$$

. 1.f) On a $\frac{1}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n} - n}{n\sqrt{n}} \sim \frac{-1}{\sqrt{n}}$. C'est le terme général d'une série divergente. Ainsi la somme partielle (S_n) diverge et donc $\boxed{\sum (-1)^n v_n \text{ diverge.}}$

2) On pose $v_n = \frac{1}{(-1)^n\sqrt{n} + n}$. Cette suite est positive à partir d'un certain rang, elle tend vers 0, mais elle n'est pas décroissante. On ne peut donc pas utiliser le théorème des séries alternées. On va donc s'inspirer du déroulé de la question 3) : on étudie la somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k v_k$

Donc $S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k v_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{2k} v_{2k} + (-1)^{2k-1} v_{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} v_{2k} - v_{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k} + 2k} - \frac{1}{-\sqrt{2k-1} + 2k - 1} =$

$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k - 1 - \sqrt{2k-1} - sqrt2k + 2k}{(\sqrt{2k} + 2k)(2k - 1 - \sqrt{2k-1})} = \sum_{k=1}^{n} \frac{-1 - \sqrt{2k-1} - \sqrt{2k}}{(\sqrt{2k} + 2k)(2k - 1 - \sqrt{2k-1})}$

Or $\frac{-1 - \sqrt{2k-1} - \sqrt{2k}}{(\sqrt{2k} + 2k)(2k - 1 - \sqrt{2k-1})} \sim \frac{-2\sqrt{2k}}{2k \cdot 2k} = \frac{-1}{\sqrt{2}k^{3/2}}$. En effet $\frac{\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k}}{2\sqrt{2k}} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

On a par ailleurs $\sum \frac{1}{k^{3/2}}$ qui converge car $3/2 > 1$.

Donc $\boxed{\sum v_n \text{ converge.}}$

Exercice 14 : *(★★ Critère de d'Alembert)*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes strictement positifs telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$

1) Montrer que si $\ell \in [0,1[$, alors $\sum u_n$ converge.

2) Montrer que si $\ell > 1$ ou $\ell = +\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.

3) En déduire la nature des séries $\sum \dfrac{x^n}{n!}$, $\sum \dfrac{n!}{n^n}$ et $\sum \binom{2n}{n}$.

.....

Réponses : **1)** On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ à partir d'un certain rang. On peut prendre $\varepsilon = \dfrac{1-\ell}{2}$, ainsi à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$, on a $\forall n \geq N$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \ell+\varepsilon = \dfrac{\ell+1}{2}$.

On a ainsi $\forall n \geq N$, $u_{n+1} < \dfrac{\ell+1}{2} u_n$. Cela ressemble fort à une suite géométrique. On peut raisonner par récurrence immédiate :

$u_n < \dfrac{\ell+1}{2} u_{n-1} < \left(\dfrac{\ell+1}{2}\right)^2 u_{n-2} < \ldots < \left(\dfrac{\ell+1}{2}\right)^{n-N} u_N$.

Ainsi $0 \leq u_n < \left(\dfrac{\ell+1}{2}\right)^{n-N} u_N$ avec $0 < \dfrac{\ell+1}{2} < \dfrac{1+1}{2} = 1$ donc $\sum \left(\dfrac{\ell+1}{2}\right)^n$ est une série géométrique convergente. Ainsi $\sum u_n$ converge.

2) On raisonne de même pour $\ell \in]1, +\infty[$: On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ à partir d'un certain rang. On peut prendre $\varepsilon = \dfrac{\ell-1}{2}$, ainsi à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$, on a $\forall n \geq N$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > \ell-\varepsilon = \dfrac{\ell+1}{2}$.

On a ainsi $\forall n \geq N$, $u_{n+1} > \dfrac{\ell+1}{2} u_n$. Cela ressemble fort à une suite géométrique. On peut raisonner par récurrence immédiate :

$u_n > \dfrac{\ell+1}{2} u_{n-1} > \left(\dfrac{\ell+1}{2}\right)^2 u_{n-2} > \ldots > \left(\dfrac{\ell+1}{2}\right)^{n-N} u_N$.

Ainsi $0 \leq u_n > \left(\dfrac{\ell+1}{2}\right)^{n-N} u_N$ avec $\dfrac{\ell+1}{2} > \dfrac{1+1}{2} = 1$ donc $\sum \left(\dfrac{\ell+1}{2}\right)^n$ est une série géométrique divergente. Ainsi $\sum u_n$ diverge.

3) -On pose $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$ alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{x}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc d'après le critère de d'Alembert, $\boxed{\text{la série converge.}}$

-On pose $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$ alors :

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{-n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n} = \exp(-n\ln(1+1/n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1} < 0$

donc d'après le critère de d'Alembert, $\boxed{\text{la série converge.}}$

-On pose $u_n = \binom{2n}{n}$ alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{=} 4 > 1$ donc d'après le critère de d'Alembert, $\boxed{\text{la série diverge.}}$

Exercice 15 : *(★★★ Séries de Bertrand)* Dans cet exercice on s'intéresse à la convergence de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$. avec $\alpha, \beta > 0$, appelée "série de Bertrand".

1) A l'aide d'une comparaison à l'intégrale, montrer que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

2) Montrer que pour $\alpha > 1$ la série de Bertrand converge et que pour $\alpha < 1$ la série de Bertrand diverge.

3) Pour $\alpha = 1$, utiliser la comparaison à une intégrale pour établir la convergence ou non de la série de Bertrand.

.....

Réponses : **1)** Vu en classe.

2) L'idée est de comparer $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ à une série de Riemann. On veut remplacer le $\ln^\beta x$ par du n^γ.

- Si $\alpha > 1$ alors on prend $\gamma > 0$ tel que $\alpha - \gamma > 1$, par exemple $\gamma = \frac{\alpha - 1}{2}$.

On a alors $\sum \frac{1}{n^{\alpha-\gamma}}$ qui converge.

De plus $\gamma > 0 \implies \frac{1}{n^\gamma \ln^\beta n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées, pour tout $\beta \in \mathbb{R}$. (même pour $\beta < 0$)

Donc à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$, on a :

$\forall n \geq N$, $\frac{1}{n^\gamma \ln^\beta n} < 1 \implies \frac{1}{\ln^\beta n} < \frac{1}{n^{-\gamma}} \implies \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} < \frac{1}{n^{\alpha-\gamma}}$.

Par comparaison de séries convergente on en déduit que $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge.

-Si $\alpha < 1$ alors on prend $\gamma > 0$ tel que $\alpha + \gamma < 1$, par exemple $\gamma = \frac{\alpha - 1}{2}$.

On a alors $\sum \frac{1}{n^{\alpha+\gamma}}$ qui dinverge.

De plus $\gamma > 0 \implies \frac{n^\gamma}{\ln^\beta x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées, pour tout $\beta \in \mathbb{R}$.

Donc à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$, on a :

$\forall n \geq N$, $\frac{n^\gamma}{\ln^\beta x} > 1 \implies \frac{n^\gamma}{n^\alpha \ln^\beta x} > \frac{1}{n^\alpha} \implies \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta x} > \frac{1}{n^{\alpha+\gamma}}$.

Par comparaison de séries divergente on en déduit que $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ diverge.

En conclusion $\boxed{\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ converge pour } \alpha > 1 \text{ et diverge pour } \alpha < 1}$.

3) On va faire une comparaison avec l'intégrale.

Si $\beta \leq 0$ on a $\frac{1}{\ln^\beta n} = \ln^{-\beta} n > 1$ pour tout $n \geq 3$ donc $\frac{1}{n \ln^\beta n} \geq \frac{1}{n}$ avec $\sum \frac{1}{n}$ qui est divergente, donc $\sum \frac{1}{n \ln^\beta n}$ diverge.

Dans la suite on considère donc $\beta > 0$ On a remarque que $f(x) = \frac{1}{x \ln^\beta x}$ est déjà clairement décroissante sur $[2, +\infty[$ dans le cas où β est positif.

On a $\forall k \geq 3$, $\int_k^{k+1} \frac{1}{t \ln^\beta t}\, \mathrm{d}t < \frac{1}{k \ln^\beta k} < \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t \ln^\beta t}\, \mathrm{d}t$

Par relation de Chasles on a donc : $\int_3^{n+1} \frac{1}{t \ln^\beta t}\, \mathrm{d}t < \sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{k \ln^\beta k} < \int_2^n \frac{1}{t \ln^\beta t}\, \mathrm{d}t$ Or si $\beta \neq 1$:

$$\int_2^n \frac{1}{t \ln^\beta t}\, \mathrm{d}t = \left[\frac{\ln^{-\beta+1} t}{-\beta+1} \right]_2^n = \frac{1}{1-\beta}(\ln^{1-\beta} n - \ln^{1-\beta} 2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty \text{ si } 1-\beta > 0 \\ \frac{\ln^{1-\beta} 2}{\beta - 1} \text{ si } 1-\beta < 0 \end{cases} = \begin{cases} +\infty \text{ si } 1 > \beta \\ \frac{\ln^{1-\beta} 2}{\beta - 1} \text{ si } 1 < \beta \end{cases}$$

Le comportement de l'intégrale à gauche de l'inégalité est le même. Ainsi pour $\beta < 1$, l'intégrale diverge. Pour $\beta > 1$, l'intégrale converge.

Enfin si $\beta = 1$:

$\int_N^n \frac{1}{t \ln t}\, \mathrm{d}t = \Big[\ln(\ln t) \Big]_N^n = \ln(\ln n) - \ln(\ln N) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ Donc l'intégrale diverge.

En conclusion $\boxed{\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\beta} \text{ converge pour } \beta > 1 \text{ et diverge pour } \beta \leq 1}$.