

TD 3 - Variables aléatoires

BCPST 1

Feuilles d'exercices

Année 2025- 2026

Les questions nécessitant la calculatrice sont estampillées (**Calculatrice**)

Exercice 1 : (♡ *Lois simples*)

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ indépendantes deux à deux. Donner la loi, l'espérance et la variance des variables ci dessous :

- 1) $X \cdot Z$ 2) $Y \cdot Z$ 3) $\min(X, Z)$ 4) $\max(Y, Z)$ 5) $X + Z$ 6) X^Z 7) Z^Y

Exercice 2 : (★)

- 1) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(q)$, déterminer $\mathbb{P}(X = Y)$. 2) Idem avec $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$.

Exercice 3 : Un candidat se présente à un concours où les 20 questions sont données sous forme de QCM. A chaque question, sont proposées 4 réponses, une seule étant exacte. L'examineur fait le compte des réponses exactes données par les candidats. Certains candidats répondent au hasard à chaque question ; pour ceux-la, définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi de probabilité, son espérance.

Exercice 4 : (★ *Min de lois géométriques*)

On suppose que $X_1, \dots, X_n \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ sont mutuellement indépendantes et on pose $Y = \min(X_1, \dots, X_n)$.

- 1) Calculer $\mathbb{P}(Y > k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.
- 2) En déduire la loi de Y et reconnaître une loi usuelle.
- 3) En déduire l'espérance et la variance de Y .

Exercice 5 : (★ (**Calculatrice**) *Les pokémons Shiny*)

Dans le jeu pokémon, on rencontre aléatoirement des pokémons. Il y a des situations très rares où les pokémons sont Shiny (brillants). Quand on rencontre un pokémon, on a de manière indépendante 1 chance sur 4096 qu'il soit Shiny.

- 1) On veut avoir une probabilité supérieure à 95% de rencontrer au moins un Shiny, combien de pokémon faut-il rencontrer au minimum pour cela ?
- 2) En terme d'espérance, combien de pokémon doit-on rencontrer pour rencontrer un premier Shiny ? On note E cette espérance
- 3) Majorer avec l'inégalité de Markov la probabilité que je n'ai pas rencontré de Shiny au bout de $2 * E$ rencontres avec des pokémons.
- 4) Calculer la probabilité exacte que je ne rencontre pas de Shiny avec $2 * E$ rencontres.
- 5) Calculer le nombre de pokémons ε tel qu'on a 50% de chances de rencontrer un Shiny entre $E + \varepsilon$ et $E - \varepsilon$ rencontres.

Exercice 6 : On considère une urne contenant quatre boules rouges et trois boules noires. On pioche une à une sans remise les boules de l'urne. Pour tout entier $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$. On note X_i le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la i -ième boule noire et $T = X_2 - X_1$.

- 1) Donner la loi de X_1 ainsi que son espérance et sa variance.
- 2) Déterminer $\mathbb{P}(X_1 = a \cap X_2 = b)$ pour tout $a \in X_1(\Omega)$ et $b \in X_2(\Omega)$. En déduire la loi de X_2 .
- 3) Que représente T ? Donner son espérance.
- 4) Déterminer $\mathbb{P}(T = a \cap X_1 = b)$ pour tout $a \in T(\Omega)$ et $b \in X_1(\Omega)$ puis la loi de T .
- 5) Donner la loi de X_3 .

Exercice 7 : (★★ *Saut à la perche !*) Dans une épreuve de saut à la perche, on considère qu'une athlète doit réussir des sauts de plus en plus difficiles. Si un saut est réussi, l'athlète peut tenter le saut suivant, sinon elle est éliminée. La probabilité de succès du n^{ieme} saut vaut $\frac{1}{n}$, indépendamment des sauts précédents. On note X le nombre de sauts réussis par l'athlète (c'est à dire qu'elle a réussi exactement X sauts, pas plus).

- 1) Déterminer la loi de X .
- 2) Justifier que X admet une espérance et la calculer.
- 3) Justifier que X admet une variance et la calculer.

Exercice 8 : (★★ *Loi de Pascal*)

Dans cet exercice on effectue un nombre illimité d'expérience de Bernoulli indépendantes avec probabilité p de succès.

- 1) a) Soit X la variable aléatoire représentant le rang du deuxième succès, donner la loi de X .
. 1.b) Dans cette question, on suppose que $X_1, X_2 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ sont indépendantes, montrer que la loi de $X_1 + X_2$ est la même que celle de X .
- 2) a) Soit X la variable aléatoire représentant le rang du $r^{\text{ième}}$ succès, donner la loi de X .
. 2.b) Dans cette question, on suppose que $X_1, X_2, \dots, X_r \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ sont mutuellement indépendantes, montrer que la loi de $X_1 + X_2 + \dots + X_r$ est la même que celle de X .

Remarque : cette loi (hors programme) est appelée loi de Pascal de paramètre r, p on la note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(r, p)$.

Exercice 9 : (★ *Premier double*) On lance une pièce équilibrée successivement de manière indépendante jusqu'à tomber sur le même résultat deux fois de suite. On note X le rang du premier double obtenu. Par exemple sur un lancer FPFPPFF, on aura $X = 8$ car le double apparaît au 7e lancer.

- 1) Déterminer la loi de X .
- 2) Justifier que $X - 1$ est géométrique.
- 3) Justifier que X admet une espérance et une variance, et les calculer.

Exercice 10 : (★★ *succès consécutifs*) On lance une pièce équilibrée successivement de manière indépendante jusqu'à trouver deux Piles de suite. On note X le rang du premier double pile obtenu. Par exemple sur un lancer FPFPPF, on aura $X = 6$ car le double pile apparaît au 6e lancer.

- 1) Déterminer $X(\Omega)$.
- 2) Dans la suite, pour $n \in X(\Omega)$, on note $p_n = \mathbb{P}(X = n)$. Justifier que $\forall n \in X(\Omega), p_{n+2} = \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{4}p_n$.
- 3) En déduire la loi de X .
- 4) Justifier que X admet une espérance, et la calculer.

Exercice 11 : (★★ *Les petits chevaux*) Dans le jeu des petits chevaux, on lance un dé équilibré pour avancer son pion sur le plateau. Si le dé tombe sur six, on le relance et on additionne le résultat obtenu. Tant que le dé vaut six, il peut être relancé.

Par exemple, si on fait le lancer 6,6,2, le pion va avancer de $6+6+2 = 14$ cases. On note X la loi du nombre de cases dont un pion avance.

- 1) Déterminer la loi de X .
- 2) Montrer que X admet une espérance et la calculer.

A la fin d'un tour de plateau, le premier cheval est à l'entrée de "l'écurie". Pour progresser dans l'écurie, le joueur doit effectuer dans l'ordre un 1 avec le dé, puis un 2, puis un 3, etc... jusqu'à avoir un 6. Si le joueur n'effectue pas le bon nombre, le cheval reste en position et le joueur doit attendre le prochain tour. On note Y la variable qui compte le nombre de tours avant que le cheval atteigne l'écurie. On note X_1 la variable représentant le rang du premier 1 obtenu, de même pour X_2 jusque X_6 ...

- 3) Donner la loi de $X_1, \dots, X_6$.

- 4) Donner le lien entre Y et $X_1, X_2, \dots, X_6$, En déduire l'espérance et la variance de Y .

Pour terminer le jeu, il faut que les quatre chevaux d'un joueur entrent dans l'écurie. En supposant qu'on fait entrer entièrement le premier cheval jusqu'au niveau 6, puis entièrement le deuxième cheval jusqu'au niveau 5, etc...

- 5) Calculer l'espérance du nombre de tours qu'il faudra pour faire entrer les quatre chevaux.

6) **(Python)** A l'aide d'un programme Python, simuler la montée de chevaux dans l'écurie en les autorisant à monter en même temps (c'est à dire que si le premier cheval n'a pas fini son ascension, on peut quand même commencer à monter le second ainsi que le 3e...) Attention, on rappelle la règle que deux chevaux ne peuvent pas être sur la même case dans l'écurie. Faire une estimation du nombre de tours nécessaire à la montée des quatre chevaux dans l'écurie.

Exercice 12 : (*Le paradoxe des enveloppes*) Voilà le principe d'un jeu d'argent assez simple : Une personne cache dans une enveloppe un montant d'argent strictement positif et le double dans une autre enveloppe. Vous choisissez une enveloppe pour gagner son contenu, mais avant de l'ouvrir la personne vous demande si vous souhaitez plutôt prendre l'autre enveloppe. Vous aurez tendance à dire "bah, ça change rien". Mais en fait contre toute attente, votre intérêt est de dire "OUI!".

Petite explication : si vous avez gagné 10€ dans la première enveloppe, l'autre enveloppe contiendra soit 5€, soit 20€ n'est ce pas ? Dès lors soit vous perdez 5€, soit vous gagnez 10€. En espérance, vous gagnez donc $\frac{10 - 5}{2} = 2,50\text{€}$. Il est donc rentable de changer d'enveloppe. Mais je vous ai fait l'exemple pour 10€, ça aurait été pareil pour n'importe quelle somme strictement positive de $x\text{€}$, le gain moyen est de $\frac{x - x/2}{2} = \frac{x}{4}$ euros, c'est un gain strictement positif, on a donc toujours intérêt à changer d'enveloppe, sans même avoir besoin de connaître le contenu.

Evidemment, il y a une arnaque dans le raisonnement que je viens de vous faire. Pourriez vous expliquer l'arnaque du raisonnement au dessus, proprement ?

Exercice 13 : (★★ *Des Grizzlis et des Poissons*)

Thierry le Grizzly pêche paisiblement le saumon dans la rivière de la forêt. Chaque jour, il croise X saumons, X étant un nombre aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre 8 (ahah.). Pour chaque saumon qu'il croise, Thierry a une chance sur deux de l'attraper, indépendamment des saumon précédents

1) On note Y_1 la variable aléatoire donnant le nombre de saumons total pêché par Thierry en une journée, donner la loi de Y_1 . Quelle est l'espérance de Y_1 ?

Sidonie la Grizzly décide un jour de pêcher dans la même rivière que Thierry. Maligne, elle se place en amont du point de pêche de Thierry, de manière à pouvoir attraper plus de saumons. Sidonie croise les mêmes saumons que Thierry, elle a aussi une chance sur deux de les attraper. Seulement, les saumons attrapés par Sidonie ne peuvent plus être pêchés par le pauvre Thierry, qui voit sa quantité totale de saumons diminuer drastiquement.

2) On note Y_2 la nouvelle variable représentant le nombre de saumons pêchés par Thierry, donner la loi de Y_2 ainsi que son espérance.