

Correction TD 3 - Variables aléatoires

BCPST 1

Feuilles d'exercices

Année 2025- 2026

Les questions nécessitant la calculatrice sont estampillées (**Calculatrice**)

Exercice 1 : (♥ Lois simples)

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ indépendantes deux à deux. Donner la loi, l'espérance et la variance des variables ci dessous :

- 1) $X \cdot Z$ 2) $Y \cdot Z$ 3) $\min(X, Z)$ 4) $\max(Y, Z)$ 5) $X + Z$ 6) X^Z 7) Z^Y

Réponses : 1) $XZ(\Omega) = \mathbb{N}$ On a $\mathbb{P}(X \cdot Z = 0) = \mathbb{P}(Z = 0) = 1 - p$

Et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(XZ = k) = \mathbb{P}(X = k \cap Z = 1) = \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Z = 1) = p(1 - p)^k \cdot p = p^2(1 - p)^k$.

Ainsi $\mathbb{P}(XZ = k) = \begin{cases} p^2(1 - p)^k & \text{si } k \geq 1 \\ 1 - p & \text{si } k = 0 \end{cases}$ Par indépendance, $\mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{p} \cdot p = \boxed{1}$.

On a $\mathbb{V}(XZ) = \mathbb{E}(X^2Z^2) - \mathbb{E}(XZ)^2 = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Z^2) - 1 = (\mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2)p - 1 = \frac{2 - p}{p^2} \cdot p - 1 = \boxed{\frac{2(1 - p)}{p}}$.

2) $XY(\Omega) = \mathbb{N}$, On a :

$\mathbb{P}(X \cdot Z = 0) = \mathbb{P}(Y = 0 \cup Z = 0) = \mathbb{P}(Y = 0) + \mathbb{P}(Z = 0) - \mathbb{P}(Y = 0 \cap Z = 0)$
 $= e^{-\lambda} + 1 - p - (1 - p)e^{-\lambda} = 1 + p(e^{-\lambda} - 1)$

Et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(YZ = k) = \mathbb{P}(Y = k \cap Z = 1) = \mathbb{P}(Y = k)\mathbb{P}(Z = 1) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \cdot p$.

Ainsi $\mathbb{P}(YZ = k) = \begin{cases} \frac{p\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} & \text{si } k \geq 1 \\ 1 + p(e^{-\lambda} - 1) & \text{si } k = 0 \end{cases}$ Par indépendance, $\mathbb{E}(YZ) = \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z) = \boxed{\lambda \cdot p}$

On a $\mathbb{V}(YZ) = \mathbb{E}(Y^2Z^2) - \mathbb{E}(YZ)^2 = \mathbb{E}(Y^2)\mathbb{E}(Z^2) - \lambda^2p^2 = (\mathbb{V}(Y) + \mathbb{E}(Y)^2)p - \lambda^2p^2$
 $= (\lambda + \lambda^2)p - \lambda^2p^2 = \boxed{\lambda p(1 + \lambda - p)}$.

3) On peut remarquer que $\min(X, Z) = Z$. En effet, $Z = 0 \iff \min(X, Z) = 0$ car $X \geq 1$.

Et $Z = 1 \iff \min(X, Z) = 1$ car $X \geq 1$.

Donc $\min(X, Z) \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $\mathbb{E}(\min(X, Z)) = p$, $\mathbb{V}(\min(X, Z)) = p(1 - p)$.

4) On a $\max(Y, Z)(\Omega) = \mathbb{N}$. On a $\mathbb{P}(\max(Y, Z) = 0) = \mathbb{P}(Y = 0 \cap Z = 0) = \mathbb{P}(Y = 0)\mathbb{P}(Z = 0) = (1 - p)e^{-\lambda}$.
 $\mathbb{P}(\max(Y, Z) = 1) = \mathbb{P}(Y = 1 \cup (Z = 1 \cap Y = 0)) = \mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(Z = 1)\mathbb{P}(Y = 0) = e^{-\lambda}(\lambda + p)$.

Enfin, si $k \geq 2$, $\mathbb{P}(\max(Y, Z) = k) = \mathbb{P}(Y = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$.

Ainsi $\mathbb{P}(\max(Y, Z) = k) = \begin{cases} (1 - p)e^{-\lambda} & \text{si } k = 0 \\ (\lambda + p)e^{-\lambda} & \text{si } k = 1 \\ \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} & \text{si } k \geq 2 \end{cases}$

On pourrait se lancer dans des calculs pour faire l'espérance et la variance, mais là on a une situation singulière qui nous permet de prendre un autre chemin plus moins calculatoire, car on voit que pour $k \geq 2$, $\max(X, Y) = k \iff Y = k$. Ainsi $\max(Y, Z) - Y$ vaut soit 0 soit 1, cela suit une loi de Bernoulli!

On remarque que $\mathbb{P}(\max(Y, Z) - Y = 1) = \mathbb{P}(Z = 1 \cap Y = 0) = pe^{-\lambda}$ Donc $\max(Y, Z) - Y \hookrightarrow \mathcal{B}(pe^{-\lambda})$

Ainsi $\mathbb{E}(\max(Y, Z) - Y) = pe^{-\lambda} \implies \mathbb{E}(\max(Y, Z)) = pe^{-\lambda} + \mathbb{E}(Y) = \boxed{pe^{-\lambda} + \lambda}$

Pour la variance, on peut faire pareil, on a besoin de $\mathbb{E}(\max(Y, Z)^2)$, or $\max(Y, Z)^2 - Y^2 \hookrightarrow \mathcal{B}(pe^{-\lambda})$, donc

$\mathbb{E}(\max(Y, Z)^2) = pe^{-\lambda} + \mathbb{E}(Y^2) = pe^{-\lambda} + \mathbb{V}(Y) + \mathbb{E}(Y)^2 = \boxed{pe^{-\lambda} + \lambda + \lambda^2}$

Ainsi $\mathbb{V}(\max(Y, Z)) = \mathbb{E}(\max(Y, Z)^2) - \mathbb{E}(\max(Y, Z))^2 = pe^{-\lambda} + \lambda + \lambda^2 - (pe^{-\lambda} + \lambda)^2$
 $= pe^{-\lambda} + \lambda + \lambda^2 - p^2e^{-2\lambda} - 2\lambda pe^{-\lambda} - \lambda^2 = \boxed{pe^{-\lambda} + \lambda - p^2e^{-2\lambda} - 2\lambda pe^{-\lambda}}$

5) On a $(X + Z)(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et D'après les probas totale sur le système complet $(Z = 0), (Z = 1)$:

$$\forall k \geq 2, \mathbb{P}(X + Z = k) = \mathbb{P}(X = k \cap Z = 0) + \mathbb{P}(X = k - 1 \cap Z = 1) = p\mathbb{P}(X = k) + (1 - p)\mathbb{P}(X = k - 1) \\ = p \cdot p(1 - p)^{k-1} + (1 - p)p(1 - p)^{k-2} = (p^2 + p)(1 - p)^{k-1}.$$

On a un cas particulier pour $k = 1$, en effet, $\mathbb{P}(X + Z = 1) = \mathbb{P}(X = 1 \cap Z = 0) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Z = 0) = p^2$.

Ainsi : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X + Z = k) = \begin{cases} p^2 & \text{si } k = 1 \\ (p^2 + p)(1 - p)^{k-1} & \text{si } k \geq 2 \end{cases}$. De plus $\mathbb{E}(X + Z) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Z) = \frac{1}{p} + p$

et $\mathbb{V}(X + Z) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Z) = \frac{1 - p}{p^2} + p(1 - p) = (1 - p)\left(\frac{1}{p^2} + p\right)$

6) $X^Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$. On a :

$$\mathbb{P}(X^Z = 1) = \mathbb{P}(X = 1 \cup Z = 0) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(Z = 0) - \mathbb{P}(X = 1 \cap Z = 0) = p + (1 - p) - p(1 - p) = 1 - p + p^2$$

Ensuite, $\forall k \geq 2, \mathbb{P}(X^Z = k) = \mathbb{P}(X = k \cap Z = 1) = \mathbb{P}(X = k)\mathbb{P}(Z = 1) = p^2(1 - p)^{k-1}$.

Donc : $\mathbb{P}(X^Z = k) = \begin{cases} 1 - p + p^2 & \text{si } k = 1 \\ p^2(1 - p)^{k-1} & \text{si } k \geq 2 \end{cases}$

Pour l'espérance et variance, on peut faire des calculs, ou bien procéder comme la question 4). On remarque que X^Z et XZ ont un comportement similaire, sauf quand elles valent 0 et 1. En fait pour $k \geq 2$, on a $X^Z = k \iff X \cdot Z = k$. Ainsi, on a $X^Z - XZ$ qui suit une Bernoulli (elle vaut soit 0 soit 1).

On a par ailleurs, $\mathbb{P}(X^Z - XZ = 1) = \mathbb{P}(Z = 0) = 1 - p$.

On a donc $X^Z - XZ \hookrightarrow \mathcal{B}(1 - p)$ Ainsi $\mathbb{E}(X^Z - XZ) = 1 - p \implies \mathbb{E}(X^Z) = 1 - p + \mathbb{E}(XZ) = 1 - p + 1 = \frac{2 - p}{p}$

De même On a donc $(X^Z)^2 - (XZ)^2 \hookrightarrow \mathcal{B}(1 - p)$ Ainsi $\mathbb{E}((X^Z)^2) = 1 - p + \mathbb{E}((XZ)^2) = 1 - p + \frac{2 - p}{p} = \frac{2 - p^2}{p}$

Donc $\mathbb{V}(X^Z) = \mathbb{E}((X^Z)^2) - \mathbb{E}(X^Z)^2 = \frac{2 - p^2}{p} - (2 - p)^2 = \frac{2}{p} - p - 4 + 2p - p^2 = \frac{2}{p} - 4 + p - p^2$

7) On a $Z^Y(\Omega) = \{0, 1\}$ donc Z^Y suit une loi de Bernoulli. On a

$$\mathbb{P}(Z^Y = 1) = \mathbb{P}(Z = 1 \cup Y = 0) = \mathbb{P}(Z = 1) + \mathbb{P}(Y = 0) - \mathbb{P}(Z = 1 \cap Y = 0) = p + e^{-\lambda} - pe^{-\lambda}.$$

On a donc $Z^Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p + e^{-\lambda} - pe^{-\lambda})$. Donc $\mathbb{E}(Z^Y) = p + e^{-\lambda} - pe^{-\lambda}$ et $\mathbb{V}(Z^Y) = (p + e^{-\lambda} - pe^{-\lambda})(1 - p)(1 - e^{-\lambda})$

Exercice 2 : (★ *Min de lois géométriques*)

On suppose que $X_1, \dots, X_n \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ sont mutuellement indépendantes et on pose $Y = \min(X_1, \dots, X_n)$.

- 1) Calculer $\mathbb{P}(Y > k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.
- 2) En déduire la loi de Y et reconnaître une loi usuelle.
- 3) En déduire l'espérance et la variance de Y .

Réponses : 1) On a $\mathbb{P}(Y > k) = \bigcap_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i > k)$. Par mutuelle indépendance,

$$\text{on a donc } \mathbb{P}(Y > k) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i > k) = \prod_{i=1}^n (1-p)^k = \boxed{(1-p)^{nk}}.$$

$$\begin{aligned} 2) \text{ On a } Y(\Omega) = \mathbb{N}^* \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(Y = k) &= \mathbb{P}(Y \geq k) - \mathbb{P}(Y \geq k+1) = \mathbb{P}(Y > k-1) - \mathbb{P}(Y > k) \\ &= (1-p)^{n(k-1)} - (1-p)^{nk} = (1-p)^{n(k-1)}(1 - (1-p)^n) = (1 - (1-p)^n) \cdot ((1-p)^n)^{k-1}. \end{aligned}$$

On reconnaît que $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{G}((1 - (1-p)^n))}$

$$3) \text{ On a } \boxed{\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{1 - (1-p)^n}} \text{ et } \boxed{\mathbb{V}(Y) = \frac{(1-p)^n}{(1 - (1-p)^n)^2}}.$$

Exercice 3 : (★)

- 1) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(q)$, déterminer $\mathbb{P}(X = Y)$.
- 2) Idem avec $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 0, n \rrbracket)$.

Exercice 4 : Un candidat se présente à un concours où les 20 questions sont données sous forme de QCM. A chaque question, sont proposées 4 réponses, une seule étant exacte. L'examineur fait le compte des réponses exactes données par les candidats. Certains candidats répondent au hasard à chaque question ; pour ceux-la, définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi de probabilité, son espérance.

Exercice 5 : (★ (*Calculatrice*) Les pokémons Shiny)

Dans le jeu pokémon, on rencontre aléatoirement des pokémons. Il y a des situations très rares où les pokémons sont Shiny (brillants). Quand on rencontre un pokémon, on a de manière indépendante 1 chance sur 4096 qu'il soit Shiny.

- 1) On veut avoir une probabilité supérieure à 95% de rencontrer au moins un Shiny, combien de pokémon faut-il rencontrer au minimum pour cela ?
- 2) En terme d'espérance, combien de pokémon doit-on rencontrer pour rencontrer un premier Shiny ? On note E cette espérance
- 3) Majorer avec l'inégalité de Markov la probabilité que je n'ai pas rencontré de Shiny au bout de $2 * E$ rencontres avec des pokémons.
- 4) Calculer la probabilité exacte que je ne rencontre pas de Shiny avec $2 * E$ rencontres.
- 5) Calculer le nombre de pokémons ε tel qu'on a 95% de chances de rencontrer un Shiny entre $E + \varepsilon$ et $E - \varepsilon$ rencontres.

Réponses : Pour cet exercice, il est pratique de remarquer que si on note X le rang du premier pokémon Shiny rencontré, alors $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ avec $p = \frac{1}{4096}$.

1) Cela revient à trouver n tel que $\mathbb{P}(X \leq n) > \frac{95}{100} = \frac{19}{20} \iff 1 - \mathbb{P}(X > n) > 1 - \frac{1}{20} \iff \mathbb{P}(X > n) < \frac{1}{20}$
 $\iff (1-p)^n < \frac{1}{20} \iff n \ln(1-p) < -\ln(20) \iff n > -\frac{\ln(20)}{\ln(1-p)}.$

Le premier nombre entier qui vérifie cela est $n = \left\lceil -\frac{\ln(20)}{\ln(1-p)} \right\rceil + 1 = \boxed{12270}.$

2) J'espère que vous savez répondre sans aide à cette question : $E = \mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} = \boxed{4096}.$

3) D'après Markov, on a $\mathbb{P}(X > 2 * E) < \frac{\mathbb{E}(X)}{2 * E} = \frac{1}{2}$. Donc on a moins d'une chance sur 2 de ne pas rencontrer de Shiny en 8192 rencontres.

4) On a $\mathbb{P}(X > 2E) = (1-p)^{2E} \simeq 0.135...$ C'est bien moins qu'une chance sur 2 en fait... Donc Markov n'était pas très précis.

5) On peut penser à Bienaymé Tchebitchev : On a $E - \varepsilon \leq X \leq E + \varepsilon \iff -\varepsilon \leq X - E \leq \varepsilon$
 $\iff |X - E| \leq \varepsilon \iff |X - \mathbb{E}(X)| \leq \varepsilon.$

On veut donc $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \leq \varepsilon) = 1 - \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > \varepsilon).$

Or d'après Bienaymé Tchebitchev, on sait que : $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2} = \frac{1-p}{\varepsilon^2 p^2}$

Or $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \leq \varepsilon) > 95\% \iff \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > \varepsilon) < 5\%$ il suffit donc d'avoir

$$\frac{1-p}{\varepsilon^2 p^2} < \frac{1}{20} \iff \frac{20(1-p)}{p^2} < \varepsilon^2 \iff \sqrt{\frac{20(1-p)}{p^2}} < \varepsilon.$$

Or $\sqrt{\frac{20(1-p)}{p^2}} = \sqrt{20 \cdot 4096 \cdot 4095} \simeq 18315,6...$ C'est peu satisfaisant. Cela est dû à l'imprécision de l'encadrement de Bienaymé Tchebitchev.

Meilleure méthode Vu qu'on connaît la loi Géométrique on peut calculer à la main, on a

$$\mathbb{P}(E - \varepsilon \leq X \leq E + \varepsilon) = \mathbb{P}(X \leq E + \varepsilon) - \mathbb{P}(X \leq E - \varepsilon) = (1 - \mathbb{P}(X > E + \varepsilon)) - (1 - \mathbb{P}(X > E - \varepsilon))$$
$$= (1 - (1-p)^{E+\varepsilon}) - (1 - (1-p)^{E-\varepsilon}) = (1-p)^{E-\varepsilon} - (1-p)^{E+\varepsilon}$$

On veut résoudre :

$$\mathbb{P}(E - \varepsilon \leq X \leq E + \varepsilon) > 0.95 \iff (1-p)^{E-\varepsilon} - (1-p)^{E+\varepsilon} > 0.95 \iff (1-p)^{-\varepsilon} - (1-p)^{\varepsilon} > \frac{0.95}{(1-p)^E}.$$

Rappelons que l'inconnue est ε qu'on cherche à isoler. Alors on peut rester bloquer, mais là y a une méthode, on peut changer de variable et poser $x = (1-p)^{\varepsilon}$, Tant qu'à faire, posons $A = \frac{0.95}{(1-p)^E}.$

on a alors $\frac{1}{x} - x > A \iff 1 - x^2 > Ax \iff 0 > x^2 + Ax - 1.$

C'est un polynôme d'ordre 2, on a $\Delta = A^2 + 4 > 0$ et donc $x_1 = \frac{-A - \sqrt{\Delta}}{2} \simeq -7.16..$ et $x_2 = \frac{-A + \sqrt{\Delta}}{2} \simeq 0.14....$ On est à l'intérieur des racines

Or $x = (1 - p)^\varepsilon$ donc $x_1 < x < x_2 \iff (1 - p)^\varepsilon < x_2 \iff \varepsilon \ln(1 - p) < \ln(x_2) \iff \varepsilon > \frac{\ln(x_2)}{\ln(1 - p)}$.

Finalement le nombre de pokémon est :

$$\varepsilon = \left\lfloor \frac{\ln(x_2)}{\ln(1 - p)} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{1}{\ln(1 - p)} \cdot \ln \left(\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{0.95}{(1 - p)^E} + \sqrt{\left(\frac{0.95}{(1 - p)^E} \right)^2 + 4} \right) \right) \right\rfloor + 1 = \boxed{8053}$$

D'après ce calcul, on a donc 95% de chances de trouver un Shiny entre $E - \varepsilon$ et $E + \varepsilon$ rencontres, c'est à dire entre 0 et 12149 rencontres. Cela ne nous apprend pas grand chose de plus que la question 1.

Exercice 6 : (★★ *Loi de Pascal*)

Dans cet exercice on effectue un nombre illimité d'expérience de Bernoulli indépendantes avec probabilité p de succès.

1) . 1.a) Soit X la variable aléatoire représentant le rang du deuxième succès, donner la loi de X .
b) Dans cette question, on suppose que $X_1, X_2 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ sont indépendantes, montrer que la loi de $X_1 + X_2$ est la même que celle de X .

2) . 2.a) Soit X la variable aléatoire représentant le rang du $r^{\text{ième}}$ succès, donner la loi de X .
b) Dans cette question, on suppose que $X_1, X_2, \dots, X_r \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ sont mutuellement indépendantes, montrer que la loi de $X_1 + X_2 + \dots + X_r$ est la même que celle de X .

Remarque : cette loi (hors programme) est appelée loi de Pascal de paramètre r, p on la note $X \hookrightarrow \mathcal{P}(r, p)$.

.....

Réponses :

Exercice 7 : (★ *Premier double*) On lance une pièce équilibrée successivement de manière indépendante jusqu'à tomber sur le même résultat deux fois de suite. On note X le rang du premier double obtenu. Par exemple sur un lancer FPFPPFF, on aura $X = 8$ car le double apparait au 7e lancer.

1) Déterminer la loi de X . 2) Justifier que $X - 1$ est géométrique.

3) Justifier que X admet une espérance et une variance, et les calculer.

.....

1) On a $X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

Si note P_i : "Pile au i^{ieme} lancer" et F_i : "Face au i^{ieme} lancer"., Pour tout $k \geq 2$, on a

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(F_k \cap F_{k-1} \cap P_{k-2} \cap F_{k-3} \cap \dots) = \mathbb{P}(F_k)\mathbb{P}(F_{k-1}) + \mathbb{P}(P_k \cap P_{k-1} \cap F_{k-2} \cap P_{k-3} \cap \dots)$$

$$= \mathbb{P}(F_k)\mathbb{P}(F_{k-1})\mathbb{P}(P_{k-2})\mathbb{P}(F_{k-3}) \dots + \mathbb{P}(P_k)\mathbb{P}(P_{k-1})\mathbb{P}(F_{k-2})\mathbb{P}(P_{k-3}) \dots$$

$$= \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}, \text{ Donc } \forall k \geq 2, \boxed{\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2^{k-1}}} \text{ par indépendance mutuelle.}$$

2) Comme $X \geq 2$, on a $X - 1 \geq 1$ donc $(X - 1)(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

$$\text{On a } \mathbb{P}(X - 1 = k) = \mathbb{P}(X = k + 1) = \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}. \text{ Donc } \boxed{X - 1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

3) On a $\mathbb{E}(X - 1) = 2 \implies \mathbb{E}(X) - 1 = 2 \implies \boxed{\mathbb{E}(X) = 3}$.

$$\text{Et } \mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(X) = \frac{1/2}{(1/2)^2} = 2 \text{ donc } \boxed{\mathbb{V}(X) = 2}.$$

Exercice 8 : (★★ succès consécutifs) On lance une pièce équilibrée successivement de manière indépendante jusqu'à trouver deux Piles de suite. On note X le rang du premier double pile obtenu. Par exemple sur un lancer FFPFPP, on aura $X = 6$ car le double pile apparait au 6e lancer.

1) Déterminer $X(\Omega)$.

2) Dans la suite, pour $n \in X(\Omega)$, on note $p_n = \mathbb{P}(X = n)$. Justifier que $\forall n \in X(\Omega), p_{n+2} = \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{4}p_n$.

3) En déduire la loi de X .

4) Justifier que X admet une espérance, et la calculer.

1) $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

2) On a $\forall n \geq 2$,

$$\mathbb{P}(X = n + 2) = \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}_{F_1}(X = n + 2) + \mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}_{P_1}(X = n + 2) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X = n + 1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}_{P_1}(X = n + 2).$$

En effet, si on a un premier lancer qui vaut Face, l'évènement d'avoir deux piles au bout de $n + 2$ lancers, revient à avoir deux piles au bout des $n + 1$ lancers restants.

De plus, comme $n + 2 > 2$, on a

$$\mathbb{P}_{P_1}(X = n + 2) = \mathbb{P}(F_2)\mathbb{P}_{P_1 \cap F_2}(X = n + 2) + \mathbb{P}(P_2)\mathbb{P}_{P_1 \cap P_2}(X = n + 2) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X = n) + 0.$$

En effet, on ne peut pas avoir le premier double pile au rang $n + 2$ tout en ayant fait le double pile sur le 2e lancer, la proba est donc nulle.

Ainsi $\mathbb{P}(X = n + 2) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X = n + 1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\mathbb{P}(X = n)$. On a bien trouvé la relation demandée.

3) C'est une suite récurrence linéaire d'ordre deux dont les premiers termes sont $p_1 = 0$ et $p_2 = \frac{1}{4}$.

On pose l'équation caractéristique $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 0$. On a donc $\Delta = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$.

$$\text{Donc } x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \text{ et } x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}.$$

$$\text{Ainsi } p_n = Ax_1^n + Bx_2^n.$$

De plus les conditions initiales donnent les équations suivantes : $\begin{cases} p_1 = 0 \\ p_2 = 1/4 \end{cases} \iff \begin{cases} Ax_1 + Bx_2 = 0 \\ Ax_1^2 + Bx_2^2 = 1/4 \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} A = -B \frac{x_2}{x_1} = -\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}B \\ \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{1 + \sqrt{5}}B + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{4}\right)^2 B = \frac{4}{16}B + \frac{3 - \sqrt{5}}{8}B = \frac{1}{4}B + \frac{3 - \sqrt{5}}{8}B = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}B = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} A = \frac{2}{\sqrt{5}(\sqrt{5} + 1)} \\ B = \frac{2}{\sqrt{5}(\sqrt{5} - 1)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{On trouve donc : } \forall n \geq 2, p_n &= \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{\sqrt{5} - 1} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^n + \frac{1}{1 + \sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{4} \right)^n \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\frac{4}{(\sqrt{5} - 1)(1 + \sqrt{5})} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^{n+1} + \frac{4}{(1 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5})} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{4} \right)^{n+1} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\frac{4}{4} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^{n+1} + \frac{4}{-4} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{4} \right)^{n+1} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{4} \right)^{n+1} \right) \text{ Finalement } \boxed{\forall n \geq 2, p_n = \frac{2}{4^{n+1}\sqrt{5}} \left((1 + \sqrt{5})^{n+1} - (1 - \sqrt{5})^{n+1} \right)} \end{aligned}$$

4) $\sum np_n$ converge car c'est une série de loi géométriques dérivées. (on a bien $x_1, x_2 \in]-1, 1[$)

$$\begin{aligned}
\text{Ainsi } \sum_{n=2}^{+\infty} n(Ax_1^n + Bx_2^n) &= Ax_1 \sum_{n=0}^{+\infty} nx_1^{n-1} + Bx_2 \sum_{n=0}^{+\infty} nx_2^{n-1} = Ax_1 \frac{1}{(1-x_1)^2} + Bx_2 \frac{1}{(1-x_2)^2} \\
&= \frac{1+\sqrt{5}}{5 \cdot 4} \frac{16}{(3-\sqrt{5})^2} + \frac{2(1-\sqrt{5})}{5(3-\sqrt{5}) \cdot 4} \frac{16}{(3+\sqrt{5})^2} = \frac{4(1+\sqrt{5})}{5(14-2\sqrt{5})} + \frac{8(1-\sqrt{5})}{5(9-5)(3+\sqrt{5})} \\
&= \frac{2}{5} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{7-\sqrt{5}} + \frac{1-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \right) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3+\sqrt{5}+3\sqrt{5}+5+7-\sqrt{5}-7\sqrt{5}+5}{21+7\sqrt{5}-3\sqrt{5}-5} = \frac{2}{5} \cdot \frac{20-4\sqrt{5}}{16-4\sqrt{5}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{4-\sqrt{5}} \\
&= \frac{2(\sqrt{5}-1)}{4\sqrt{5}-1} = 0.311..
\end{aligned}$$

Exercice 9 : (★★ *Saut à la perche !*) Dans une épreuve de saut à la perche, on considère qu'une athlète doit réussir des sauts de plus en plus difficiles. Si un saut est réussi, l'athlète peut tenter le saut suivant, sinon elle est éliminée. La probabilité de succès du $n^{\text{ième}}$ saut vaut $\frac{1}{n}$, indépendamment des sauts précédents. On note X le nombre de sauts réussis par l'athlète (c'est à dire qu'elle a réussi exactement X sauts, pas plus).

- 1) Déterminer la loi de X .
- 2) Justifier que X admet une espérance et la calculer.
- 3) Justifier que X admet une variance et la calculer.

.....
 1) On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ car le premier saut est forcément réussi. On a par ailleurs si $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^k S_j \cap \overline{S_{k+1}}\right) = \prod_{j=1}^k \frac{1}{j} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) = \boxed{\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}}$$

Remarque : on peut vérifier que ça fonctionne, on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{0!} - \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{1} - 0 = 1 \text{ par télescopage.}$$

$$\begin{aligned} 2) \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} - \frac{(k+1) - 1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} - \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} - 1 \right) - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e - (e - 1) + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} - 2 \right) = 1 + (e - 2) = \boxed{e - 1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \mathbb{E}(X^2) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2}{k!} - \frac{k^2}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{(k-1)!} - \frac{k(k+1) - k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(k-1) + 1}{(k-1)!} - \frac{1}{(k-1)!} + \frac{k}{(k+1)!} \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{(k-1)!} + \frac{(k+1) - 1}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} \\ &= e + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} = e + (e - 1) - \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 2e - 1 - (e - 2) = \boxed{e + 1} \end{aligned}$$

$$\text{On a donc } \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = e + 1 - (e - 1)^2 = e + 1 - e^2 + 2e - 1 = 3e - e^2 = \boxed{e(3 - e)}$$

Exercice 10 : (★★ *Les petits chevaux*) Dans le jeu des petits chevaux, on lance un dé équilibré pour avancer son pion sur le plateau. Si le dé tombe sur six, on le relance et on additionne le résultat obtenu. Tant que le dé vaut six, il peut être relancé. Par exemple, si on fait le lancer 6,6,2, le pion va avancer de $6+6+2 = 14$ cases. On note X la loi du nombre de cases dont un pion avance.

1) Déterminer la loi de X .

2) Montrer que X admet une espérance et la calculer.

A la fin d'un tour de plateau, le premier cheval est à l'entrée de "l'écurie". Pour progresser dans l'écurie, le joueur doit effectuer dans l'ordre un 1 avec le dé, puis un 2, puis un 3, etc... jusqu'à avoir un 6. Si le joueur n'effectue pas le bon nombre, le cheval reste en position et le joueur doit attendre le prochain tour. On note Y la variable qui compte le nombre de tours avant que le cheval atteigne l'écurie. On note X_1 la variable représentant le rang du premier 1 obtenu, de même pour X_2 jusque X_6 ...

3) Donner la loi de $X_1, \dots, X_6$.

4) Donner le lien entre Y et $X_1, X_2, \dots, X_6$, En déduire l'espérance et la variance de Y .

Pour terminer le jeu, il faut que les quatre chevaux d'un joueur entrent dans l'écurie. En supposant qu'on fait entrer entièrement le premier cheval jusqu'au niveau 6, puis entièrement le deuxième cheval jusqu'au niveau 5, etc...

5) Calculer l'espérance du nombre de tours qu'il faudra pour faire entrer les quatre chevaux.

6) **(Python)** A l'aide d'un programme Python, simuler la montée de chevaux dans l'écurie en les autorisant à monter en même temps (c'est à dire que si le premier cheval n'a pas fini son ascension, on peut quand même commencer à monter le second ainsi que le 3e...) Attention, on rappelle la règle que deux chevaux ne peuvent pas être sur la même case dans l'écurie. Faire une estimation du nombre de tours nécessaire à la montée des quatre chevaux dans l'écurie.

Réponses : On note D_i la variable aléatoire qui représente le résultat du i^e lancer de dé.

1) On a $X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{6k \mid k \in \mathbb{N}\}$ (on ne peut jamais avancer d'un nombre multiple de 6, car pour chaque 6 on va relancer.)

Si $k \in X(\Omega)$, on note $k = 6q + r$ la division euclidienne de k par 6, alors :

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^q D_i = 6 \cap D_{q+1} = r\right) = \prod_{i=1}^q \mathbb{P}(D_i = 6) \mathbb{P}(D_{q+1} = r) = \frac{1}{6^q} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6^{q+1}}$$

Remarque : comme on peut écrire le quotient $q = \left\lfloor \frac{k}{6} \right\rfloor$ on peut généraliser ainsi :

$$\forall k \in X(\Omega), \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{6^{\lfloor \frac{k}{6} \rfloor + 1}}.$$

Remarque : comme d'hab on peut vérifier que la somme vaut 1. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = k) &= \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{r=1}^5 \mathbb{P}(X = 6q + r) = \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{r=1}^5 \frac{1}{6^{q+1}} = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{6^{q+1}} \sum_{r=1}^5 1 = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{5}{6^{q+1}} \\ &= \frac{5}{6} \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{6^q} = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{1 - 1/6} = \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{5} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{r=1}^5 (6q + r) \frac{1}{6^{q+1}} = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{6^{q+1}} \left(5 \cdot 6q + \sum_{r=1}^5 r \right) = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{6^{q+1}} (5 \cdot 6q + 15) \\ &= \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{5q}{6^q} + \frac{15}{6^{q+1}} = \frac{5}{6} \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{q}{6^{q-1}} + \frac{15}{6} \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{6^q} = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{(1 - 1/6)^2} + \frac{15}{6} \cdot \frac{1}{(1 - 1/6)} = \frac{5}{6} \cdot \frac{36}{25} + \frac{15}{6} \cdot \frac{6}{5} \\ &= \frac{6}{5} + 3 = \frac{21}{5} = 4,2 \end{aligned}$$

Donc en moyenne, un cheval avance de 4,2 cases par tour.

3) Pour $i \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$, X_i est le rang du tour où l'on obtient i . Le i sera forcément obtenu sur le dernier lancer du dé pendant le tour : par exemple : "6,6,i". Or par équiprobabilité, toutes les valeurs entre 1 et 5 ont autant de chance d'être obtenues (il y a symétrie, les résultats du dé 1,2,3,4,5 n'ont pas d'effet particulier dans le jeu des chevaux). Ainsi à chaque tour, on a $1/5$ que le dernier lancer de dé tombe sur i . Chaque lancer est donc une expérience de Bernoulli de paramètre $p = 1/5$. Or, on attend le premier succès, on a

donc $X_i \iff \mathcal{G}(1/5)$.

Pour $i = 6$, c'est différent car 6 a un rôle particulier. Le six doit forcément être le résultat du 1er lancer de dé, sinon c'est qu'on a eu autre chose que 6. Sur le 1er lancer, toutes les faces ont autant de chances de tomber donc $X_i \hookrightarrow \mathcal{G}(1/6)$.

4) $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6$.

Ainsi par linéarité, $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X_1) + \dots + \mathbb{E}(X_6) = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 6 = \boxed{31}$.

Par indépendance mutuelle, on a $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X_1) + \dots + \mathbb{V}(X_6) = 5 \cdot \frac{4/5}{1/25} + \frac{5/6}{1/36} = 100 + 30 = \boxed{130}$.

Cela fait un écart-type d'environ 11.

5) Cette fois on doit additionner le temps de monter des quatre chevaux prises de manière indépendante : on les note Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 . le $Y_1 = Y$ a été évalué précédemment. On remarque que $Y_2 = X_1 + \dots + X_5$, $Y_3 = X_1 + \dots + X_4$ et $Y_4 = X_1 + X_2 + X_3$.

Par linéarité de l'espérance, on a

$\mathbb{E}(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) = \mathbb{E}(Y_1) + \mathbb{E}(Y_2) + \mathbb{E}(Y_3) + \mathbb{E}(Y_4) = 31 + 5 \cdot 5 + 4 \cdot 5 + 3 \cdot 5 = 31 + 25 + 20 + 15 = \boxed{91}$.

6)

```
import random as rd

def chevaux():

    #la liste C represente les 4 chevaux qui au depart ne sont pas dans l'
    #ecurie
    C = [0,0,0,0]

    tours = 0

    #Tant que la liste de chevaux n'a pas atteint la position finale
    while(C != [6,5,4,3]):
        #on augmente le compteur de tours
        tours += 1

        #on lance le de
        x = rd.randint(1,6)

        #Tant que le de vaut 6
        while(x == 6):
            # On relance
            x = rd.randint(1,6)

        # si on peut faire monter le 1er cheval en position finale, on
        # le fait.
        if(C[0] == 5):
            C[0] += 1

        # quand le de ne vaut plus 6, on fait monter un cheval si on peut.

    for i in range(len(C)):
        #si un cheval est en position de monter
        # ET si la place n'est pas prise par un autre cheval,
        # alors on fait monter.
        if (C[i] == x-1) and (x not in C[:i]):
            C[i] += 1
            break #un seul cheval peut monter.
```

```
        return tours

# Pour estimer l'esperance, on fait la moyenne.
N = 10000; E = 0
for i in range(N):
    E += chevaux()
E /= N
print("esperance estimee : ",E)
```

On trouve une espérance proche de 60.

Exercice 11 : (*Le paradoxe des enveloppes*) Voilà le principe d'un jeu d'argent assez simple : Une personne cache dans une enveloppe un montant d'argent strictement positif et le double dans une autre enveloppe. Vous choisissez une enveloppe pour gagner son contenu, mais avant de l'ouvrir la personne vous demande si vous souhaitez plutôt prendre l'autre enveloppe. Vous aurez tendance à dire "bah, ça change rien". Mais en fait contre toute attente, votre intérêt est de dire "OUI!".

Petite explication : si vous avez gagné 10€ dans la première enveloppe, l'autre enveloppe contiendra soit 5€, soit 20€ n'est ce pas ? Dès lors soit vous perdez 5€, soit vous gagnez 10€. En espérance, vous gagnez donc $\frac{10-5}{2} = 2,50$ €. Il est donc rentable de changer d'enveloppe. Mais je vous ai fait l'exemple pour 10€, ça

aurait été pareil pour n'importe quelle somme strictement positive de x €, le gain moyen est de $\frac{x-x/2}{2} = \frac{x}{4}$ euros, c'est un gain strictement positif, on a donc toujours intérêt à changer d'enveloppe, sans même avoir besoin de connaître le contenu.

Evidemment, il y a une arnaque dans le raisonnement que je viens de vous faire. Pourriez vous expliquer l'arnaque du raisonnement au dessus, proprement ?

.....

1) L'arnaque est qu'on suppose qu'il y a autant de chances que l'autre enveloppe ait un gain de $2x$ euros ou de $x/2$ euros.

On va supposer par l'absurde l'hypothèse (H) : pour toute somme x découverte dans une enveloppe, il y a autant de chances que la somme $x/2$ ou la somme $2x$ soit présente dans l'autre enveloppe..

On peut prouver que c'est impossible en choisissant une variable aléatoire X représentant le gain de l'enveloppe qu'on a choisi. On note X' la variable aléatoire représentant le gain de l'autre enveloppe. On remarque d'abord que $X(\Omega)$ et $X'(\Omega)$ sont forcément infinis.

En effet, si $X(\Omega)$ était fini, il aurait un minimum, ce qui contredirait l'hypothèse (H), car en ouvrant une enveloppe de valeur minimale, on saura avec certitude que l'autre enveloppe contient $2x$ euros.

Or, d'après (H) pour tout $a \in X(\Omega)$, on a $\mathbb{P}_{(X=a)}(X' = a/2) = \mathbb{P}_{(X=a)}(X' = 2a) = 1/2$, en effet, on a

$$\mathbb{P}(X' = 2a) = \mathbb{P}_{(X=a)}(X' = 2a)\mathbb{P}(X = a) + \mathbb{P}_{(X=4a)}(X' = 2a)\mathbb{P}(X = 4a) = \frac{\mathbb{P}(X = a) + \mathbb{P}(X = 4a)}{2} \mathbb{P}_{(X=a)}(X' = a/2)\mathbb{P}(X = a) = \mathbb{P}(X' = a/2).$$

Ainsi, si on prend $x \in X'(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X' = x) > 0$, on a :

$\mathbb{P}(X' = x) = \mathbb{P}(X' = x/4) = \mathbb{P}(X' = x/16) = \dots = \mathbb{P}(X' = (x/4^n))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence immédiate.

Or comme X est une variable aléatoire, $\sum_{a \in X'(\Omega)} \mathbb{P}(X' = a)$ doit converger vers 1. Cette série domine pourtant

la série $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}\left(X' = \frac{x}{4^n}\right) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X' = x)$. Cette série est grossièrement divergente car $\mathbb{P}(X' = x) > 0$.

Nous avons donc une contradiction.

Exercice 12 : (★★ *Des Grizzlis et des Poissons*)

Thierry le Grizzly pêche paisiblement le saumon dans la rivière de la forêt. Chaque jour, il croise X saumons, X étant un nombre aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre 8 (ahah.). Pour chaque saumon qu'il croise, Thierry a une chance sur deux de l'attraper, indépendamment des saumons précédents

1) On note Y_1 la variable aléatoire donnant le nombre de saumons total pêché par Thierry en une journée, donner la loi de Y_1 . Quelle est l'espérance de Y_1 ?

Sidonie la Grizzly décide un jour de pêcher dans la même rivière que Thierry. Maligne, elle se place en amont du point de pêche de Thierry, de manière à pouvoir attraper plus de saumons. Sidonie croise les mêmes saumons que Thierry, elle a aussi une chance sur deux de les attraper. Seulement, les saumons attrapés par Sidonie ne peuvent plus être pêchés par le pauvre Thierry, qui voit sa quantité totale de saumons diminuer drastiquement.

2) On note Y_2 la nouvelle variable représentant le nombre de saumons pêchés par Thierry, donner la loi de Y_2 ainsi que son espérance.

.....

1) On a $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(4)$ et donc $\mathbb{E}(Y) = 4$

2) On s'attend assez logiquement à ce que le nombre de saumons de Thierry diminue de moitié, parce que Sidonie pêche en moyenne la moitié des saumons. Voici comment le prouver :

$$\begin{aligned} \text{On cherche } \mathbb{P}_{(X=\ell)}(Y_2 = k) &= \sum_{j=0}^{\ell-k} \mathbb{P}_{(X=\ell)}(Y_2 = k \cap Y_1 = j) \\ &= \sum_{j=0}^{\ell-k} \mathbb{P}_{(X=\ell)} \mathbb{P}(Y_1 = j) \mathbb{P}_{(X=\ell) \cap (Y_1=j)}(Y_2 = k) = \sum_{j=0}^{\ell-k} \binom{\ell}{j} p^j (1-p)^{\ell-j} \binom{\ell-j}{k} p^k (1-p)^{2\ell-2j-k} \\ &= \sum_{j=0}^{\ell-k} \binom{\ell}{j} \binom{\ell-j}{k} p^{j+k} (1-p)^{2\ell-2j-k} = \sum_{j=0}^{\ell-k} \frac{\ell! \cdot (\ell-j)!}{j! \cdot (\ell-j)! \cdot k! \cdot (\ell-j-k)!} p^{j+k} (1-p)^{2\ell-2j-k} \\ &= \frac{\ell!}{(\ell-k)!k!} \sum_{j=0}^{\ell-k} \frac{(\ell-k)!}{j! \cdot (\ell-k-j)!} p^{j+k} (1-p)^{2\ell-2j-k} = \binom{\ell}{k} p^k (1-p)^k \sum_{j=0}^{\ell-k} \binom{\ell-k}{j} p^j ((1-p)^2)^{(\ell-k)-j} \\ &= \binom{\ell}{k} p^k \cdot (1-p)^k \cdot (p + (1-p)^2)^{\ell-k} = \binom{\ell}{k} p^k (1-p)^k \cdot (p^2 - p + 1)^{\ell-k}. \end{aligned}$$

On rappelle que $p = \frac{1}{2}$ ainsi, $\mathbb{P}_{(X=\ell)}(Y_2 = k) = \binom{\ell}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{\ell-k}$. Sachant que $X = \ell$, Y_2 suit donc une loi binômiale de paramètre $\frac{1}{4}$. Ainsi, comme pour la question 1, on peut déduire que Y_2 suit une loi de Poisson de paramètre $8 \times \frac{1}{4} = 2$. Ainsi $Y_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(2)$ et $\boxed{\mathbb{E}(Y_2) = 2}$
