

TD 4 - Couples de variables aléatoires

BCPST 1

Feuilles d'exercices

Année 2025- 2026

Exercice 1 : ★

On tire deux balles sans remise dans une urne qui contient quatre balles numérotés. On note X le min et Y le max obtenus.

- 1) Donner la loi conjointe de (X, Y) , ainsi que les lois marginales.
- 2) X et Y sont elles indépendantes ?
- 3) Calculer $\text{Cov}(X, Y)$, interpréter le résultat.
- 4) Calculer le coefficient de corrélation linéaire $\rho_{X,Y}$, interpréter.

Exercice 2 : ★

On lance de manière indépendante deux dés à 4 faces équilibrés. On note X le nombre de "1" obtenus et Y le maximum des deux dés.

- 1) Donner la loi conjointe de (X, Y) , ainsi que les lois marginales.
- 2) X et Y sont elles indépendantes ?
- 3) Calculer $\text{Cov}(X, Y)$, interpréter le résultat.
- 4) Calculer le coefficient de corrélation linéaire $\rho_{X,Y}$, interpréter.

Exercice 3 : ★

On lance une pièce de monnaie deux fois. On note X le nombre de Pile obtenus.

Pour chaque Pile obtenu, on lance un dé et on note Y le maximum des lancers de dés obtenus.

Par défaut on suppose que s'il n'y a aucun Pile alors $Y = 0$.

- 1) Donner la loi conjointe de (X, Y) , ainsi que les lois marginales.
- 2) X et Y sont elles indépendantes ?
- 3) Calculer $\text{Cov}(X, Y)$, interpréter le résultat.
- 4) Calculer le coefficient de corrélation linéaire $\rho_{X,Y}$, interpréter.

Exercice 4 : ★

Soit $a \in \mathbb{R}$ et X et Y deux variables aléatoires telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ et

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \begin{cases} \frac{a \cdot i}{j} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1) Calculer $a \in \mathbb{R}$ en fonction de n .
- 2) Trouver la loi de Y .
- 3) X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 5 : ★ Soit $a \in \mathbb{R}$ et X et Y deux variables aléatoires telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{a}{2^i \cdot 3^j}$$

- 1) Calculer $a \in \mathbb{R}$ en fonction de n .
- 2) Trouver les lois marginales de X et Y .
- 3) X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 6 : ★★

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi de binômiale de paramètres n, p .

- 1) On note $Z = X + Y$, calculer $\text{Cov}(X, Z)$ et leur coefficient de corrélation linéaire $\rho_{X,Z}$
- 2) On note $Z = X \cdot Y$, calculer $\text{Cov}(X, Z)$ et leur coefficient de corrélation linéaire $\rho_{X,Z}$

Exercice 7 : ★★ On dit que le couple de variable aléatoire (X, Y) est suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket^2$ si et seulement si tous les couples $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ont autant de chance d'être atteint par le couple (X, Y) . Dans ce cas, X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 8 : ★★

Soit $X, Y \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$ indépendantes, donner la loi, l'espérance et la variance des lois suivantes :

- 1) $X + Y$ 2) $\max(X, Y)$ 3) $\min(X, Y)$. 4) $X - Y$.

Exercice 9 : ★★

Dans un restaurant, des clients prennent une entrée avec une probabilité $p \in]0, 1[$, si l'entrée n'a pas été choisie, alors les clients prennent un dessert avec une probabilité $1 - p$. Un client peut donc ne choisir ni un dessert, ni une entrée.

On note X le nombre de clients prenant un dessert et Y le nombre de clients prenant une entrée. On suppose de plus que le nombre total de clients suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

- 1) Déterminer la loi du couple (X, Y) et en déduire les lois marginales de X et Y .
 2) X et Y sont-elles indépendantes ? 3) Calculer $\mathbb{E}(XY)$ et $\text{Cov}(X, Y)$.

Exercice 10 : ★★★

Soit $\mu > \lambda > 0$ et soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$. Montrer que Y suit une loi de Poisson.

Exercice 11 : ★★ Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X est indépendante de $X + Y$. Que peut-on dire de la loi de X ?

Exercice 12 : ★★ Soit $p \in]0, 1[$ et X et Y indépendantes suivant la loi $\mathcal{G}(p)$.

- 1) Pour $r \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(X = rY)$
 2) Soit $Ma = \max(X, Y)$ et $Mi = \min(X, Y)$, déterminer la loi du couple (Ma, Mi) .
 3) Déterminer les lois de Ma et de Mi .

Exercice 13 : ★★ On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n telles que la boîte numéro k contienne k boules numérotées de 1 à k . On choisit une boîte de façon équiprobable puis une boule dans cette boîte. On note X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

- 1) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) .
 2) En déduire la seconde loi marginale. 3) Déterminer $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 14 : ★ Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi :

$$X(\Omega) = Y(\Omega) = \{-1, 1\} \text{ et } \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(Y = -1) = \frac{1}{2}.$$

On note $U = X + Y$, $V = XY$.

- 1) Donner la loi conjointe du couple (U, V) , en déduire les lois marginales de U et V .
 2) Calculer $\text{Cov}(U, V)$. 3) U et V sont-elles indépendantes ?