Correction TD 4 - Couples de variables aléatoires - Corrigé

BCPST 1 Feuilles d'exercices Année 2025- 2026

Exercice 1 : ★

On tire deux balles sans remise dans une urne qui contient quatre balles numérotés. On note X le min et Y le max obtenus.

1) Donner la loi conjointe de (X,Y), ainsi que les lois marginales. **2)** X et Y sont elles indépendantes ?

3) Calculer $\text{Cov}(X,Y)$, interpréter le résultat.

4) Calculer le coefficient de corrélation linéaire $\rho_{X,Y}$, interpréter.

.....

1) Ici on a $\text{Card}(\Omega) = \binom{2}{4} = 6$ (l'ordre n'est pas important quand on consièdre le max et le min du tirage). Les différents tirages sont tous équiprobables donc on peut faire un tableau :

$X\backslash Y$	2	3	4	X
1	1/6	1/6	1/6	1/2
2	0	1/6	1/6	1/3
3	0	0	1/6	1/6
Y	1/6	1/3	1/2	1

2) Par exemple on a $\mathbb{P}(X=2, Y=2) = 0$. Or $\mathbb{P}(X=2)\mathbb{P}(Y=2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9} \neq 0$. Donc elles ne sont $\boxed{\text{pas indépendantes}}$.

3) On a $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{6} = \frac{3+4+3}{6} = \frac{5}{3}$ et $\mathbb{E}(Y) = \frac{2}{6}+\frac{3}{3}+\frac{4}{2} = \frac{1+3+6}{3} = \frac{10}{3}$.

Il faut ensuite trouver la loi de $Z = XY$, c'est plus pénible... On a $Z(\Omega) = \{2,3,4,6,8,12\}$.

L'avantage est que toutes les issues de Z sont équiprobables, ainsi : $\mathbb{E}(Z) = \frac{2+3+4+6+8+12}{6} = \frac{35}{6}$

On en déduit $\text{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{35}{6} - \frac{10}{3}\cdot\frac{5}{3} = \frac{105-100}{18} = \boxed{\frac{5}{18}}$.

La covariance est positive, ce qui signifie que lorsque X est au dessus de la moyenne, Y aussi. C'est logique : quand le minimum est élevé, il va aussi tirer vers le haut le maximum.

4) On doit faire la variance de X et de Y.

Pour $\mathbb{V}(X)$: On a $\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{2}+\frac{4}{3}+\frac{9}{6} = \frac{3+8+9}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$. Ainsi $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{10}{3} - \frac{25}{9} = \frac{5}{9}$.

Pour $\mathbb{V}(Y)$: On a $\mathbb{E}(Y^2) = \frac{4}{6}+\frac{9}{3}+\frac{16}{2} = \frac{2+9+24}{3} = \frac{35}{3}$ Ainsi $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \frac{35}{3} - \frac{100}{9} = \frac{5}{9}$.

Remarque : on a la même variance, cela veut sans doute dire qu'il y a un motif mathématique sous-jacent. En l'occurrence, on pourrait faire un exercice (facile) pour montrer que $4-X$ a la même loi que Y. On a donc $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(4-X) = \mathbb{V}(-X) = \mathbb{V}(X)$.

Calculons $\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{5/18}{5/9} = \boxed{\frac{1}{2} = 0.5}$. La corrélation de 0.5 à mi-chemin entre 0 et 1 indique qu'on a une corrélation non négligeable, mais pas très linéaire.

Exercice 2 : ★

On lance de manière indépendante deux dés à 4 faces équilibrés. On note X le nombre de "1" obtenus et Y le maximum des deux dés.

1) Donner la loi conjointe de (X, Y), ainsi que les lois marginales. **2)** X et Y sont elles indépendantes ?
3) Calculer $\text{Cov}(X, Y)$, interpréter le résultat.
4) Calculer le coefficient de corrélation linéaire $\rho_{X,Y}$, interpréter.

.....

1) On compte à chaque fois par équiprobabilités en faisant $\dfrac{\#\text{ issues favorables}}{\#\text{ issues totales}}$.

On a Par exemple $\mathbb{P}(X = 0, Y = 4) = \dfrac{5}{16}$ car les issues favorables sont $\{(2,4),(4,2),(3,4),(4,3),(4,4)\}$
On peut faire un tableau :

$X\backslash Y$	1	2	3	4	X
0	0	1/16	3/16	5/16	9/16
1	0	2/16	2/16	2/16	6/16
2	1/16	0	0	0	1/16
Y	1/16	3/16	5/16	7/16	1

2) Certainement pas. Il suffit de trouver un contre-exemple, en l'occurrence $\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = 0$ or $\mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 1) = \dfrac{9}{16} \times \dfrac{1}{16} \neq 0$. $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.}}$

3) On va utiliser la formule de König-Huygens : $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

En l'occurrence $X \hookrightarrow \mathcal{B}(2, 1/4)$ donc $\mathbb{E}(X) = 2 \times 1/4 = 1/2 = 0.5$

et $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{1}{16} + 2 \cdot \dfrac{3}{16} + 3 \cdot \dfrac{5}{16} + 4 \cdot \dfrac{7}{16} = \dfrac{1+6+15+28}{16} = \dfrac{50}{16} = \dfrac{25}{8} = 3.125$

Enfin, si on regarde $Z = XY$, on peut faire la loi de Z : on a $Z(\Omega) = [\![0, 4]\!]$.
Avec

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(Z = k)$	9/16	1/16	2/16	2/16	2/16

Ainsi $\mathbb{E}(Z) = \dfrac{1}{16} + 2 \cdot \dfrac{2}{16} + 3 \cdot \dfrac{2}{16} + 4 \cdot \dfrac{2}{16} = \dfrac{1+4+6+8}{16} = \dfrac{17}{16} = 1.0625$
On a donc $\text{Cov}(X, Y) = \dfrac{17}{16} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{25}{16} = \dfrac{17-25}{16} = -\dfrac{8}{16} = \boxed{-\dfrac{1}{2} = -0.5}$.
Une covariance négative indique que lorsque X est plus grand que son espérance, alors Y a tendance à être plus petit que son espérance. C'est logique car plus le nombre de 1 obtenus est élevé, moins le maximum a de chances d'être grand.

4) On doit calculer les variances de X et Y : Pour X c'est facile car $X \hookrightarrow \mathcal{B}(2, 1/4)$ donc $\mathbb{V}(X) = 2 \times 1/4 \times \dfrac{3}{4} = 3/8$

Pour Y : $\mathbb{E}(Y^2) = \dfrac{1}{16} + 4 \cdot \dfrac{3}{16} + 9 \cdot \dfrac{5}{16} + 16 \cdot \dfrac{7}{16} = \dfrac{1+12+45+112}{16} = \dfrac{170}{16} = \dfrac{85}{8}$
Ainsi $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = \dfrac{85}{8} - \dfrac{625}{64} = \dfrac{680-625}{64} = \dfrac{55}{64}$

Donc $\rho_{X,Y} = \dfrac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \dfrac{-1/2}{\sqrt{3/8 \cdot 55/64}} = -8\sqrt{\dfrac{2}{165}} \simeq \boxed{-0.88}$. Le coefficient est assez proche de -1.
Cela signifie que X et Y sont fortement corrélées linéairement (la pente de corrélation sera décroissante).

Exercice 3 : ★

On lance une pièce de monnaie deux fois. On note X le nombre de Pile obtenus.
Pour chaque Pile obtenu, on lance un dé et on note Y le maximum des lancers de dés obtenus.
Par défaut on suppose que s'il n'y a aucun Pile alors $Y = 0$.

1) Donner la loi conjointe de (X, Y), ainsi que les lois marginales.
2) X et Y sont elles indépendantes ?
3) Calculer $\text{Cov}(X, Y)$, interpréter le résultat.
4) Calculer le coefficient de corrélation linéaire $\rho_{X,Y}$, interpréter.

Exercice 4 :
Soit $a \in \mathbb{R}$ et X et Y deux variables aléatoires telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!] \ , \ \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \begin{cases} \dfrac{a \cdot i}{j} \text{ si } i \leq j \\ 0 \text{sinon} \end{cases}$$

1) Calculer $a \in \mathbb{R}$ en fonction de n. **2)** Trouver la loi de Y.
3) X et Y sont elles indépendantes ?

.....

1) Comme c'est une loi conjointe, on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = 1$.

Or $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{ai}{j} = a \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j} = a \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j} a = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} i = a \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \frac{j(j+1)}{2}$

$= a \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{j+1}{2} = a \frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{2} + a \frac{n}{2} = a \frac{n(n+1) + 2n}{4} = a \frac{n(n+3)}{4}$

Finalement on trouve que $\boxed{a = \dfrac{4}{n(n+3)}}$

2) On a $\forall j \in [\![1, n]\!]$ $\mathbb{P}(Y = j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = i \cap Y = j) = \sum_{i=1}^{j} \frac{a \cdot i}{j} = \frac{a}{j} \sum_{i=1}^{j} i = \frac{a}{j} \frac{j(j+1)}{2} = \boxed{\dfrac{2(j+1)}{n(n+3)}}$

3) On a $\mathbb{P}(X = n, Y = n) = a$. Or ${}_P(X = n) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X = n, Y = j) = \sum_{j=n}^{n} \frac{ai}{j} = a \frac{n}{n} = a$.

De plus d'après la question précédente on a $\mathbb{P}(Y = n) = \dfrac{2(n+1)}{n(n+3)}$
donc $\mathbb{P}(X = n, Y = n) \neq \mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}(Y = n)$, elles ne sont pas indépendantes.

Exercice 5 :
Soit $a \in \mathbb{R}$ et X et Y deux variables aléatoires telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et

$$\forall i, j \in \mathbb{N}\ ,\ \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{a}{2^i \cdot 3^j}$$

1) Calculer $a \in \mathbb{R}$ en fonction de n. **2)** Trouver les lois marginales de X et Y.
3) X et Y sont elles indépendantes ?

.....

1) Comme c'est une loi conjointe, on a $\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X = i, Y = j) = 1$.

Or $\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{a}{2^i \cdot 3^j} = a\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{2^i}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{3^j} = a\frac{1}{1-1/2}\cdot\frac{1}{1-1/3} = a \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} = 3a$

Ainsi $\boxed{a = \frac{1}{3}}$.

2) On a $\forall j \in \mathbb{N}\ \mathbb{P}(Y = j) = \sum_{i=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X = i \cap Y = j) = \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{a}{2^i 3^j} = \frac{a}{3^j}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{2^i} = \frac{a}{3^j}\frac{1}{1-1/2} = \frac{2 \cdot a}{3^j} = \boxed{\frac{2}{3^{j+1}}}$

On a $\forall i \in \mathbb{N}\ \mathbb{P}(X = i) = \sum_{j=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X = i \cap Y = j) = \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{a}{2^i 3^j} = \frac{a}{2^i}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{3^j} = \frac{a}{2^i}\frac{1}{1-1/3} = \frac{1/3}{2^i} \cdot \frac{3}{2} = \boxed{\frac{1}{2^{i+1}}}$

3) On a $\mathbb{P}(X = i \cap Y = j) = \frac{1}{2^i \cdot 3^{j+1}}$. Et $\mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j) = \frac{1}{2^{i+1}}\frac{2}{3^{j+1}} = \frac{1}{2^i \cdot 3^{j+1}} = \mathbb{P}(X = i \cap Y = j)$

Les variables sont donc $\boxed{\text{indépendantes}}$.

Exercice 6 : Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi de binômiale de paramètres n, p. **1)** On note $Z = X + Y$, calculer $\mathrm{Cov}(X, Z)$ et leur coefficient de corrélation linéaire $\rho_{X,Z}$
2) On note $Z = X \cdot Y$, calculer $\mathrm{Cov}(X, Z)$ et leur coefficient de corrélation linéaire $\rho_{X,Z}$

.....

1) $\mathrm{Cov}(X, Z) = \mathrm{Cov}(X, X + Y) = \mathrm{Cov}(X, X) + \mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{V}(X) + 0 = np(1-p) = \boxed{np(1-p)}$.
On a $\rho_{X,Z} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X, Z)}{\sigma(X)\sigma(Z)}$.
Or $\mathbb{V}(Z) = \mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) = 2\mathbb{V}(X)$
Donc $\rho_{X,Z} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X, Z)}{\sigma(X)\sigma(Z)} = \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\sqrt{\mathbb{V}(X) \cdot 2\mathbb{V}(X)}} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$.
2) On a $\mathrm{Cov}(X, Z) = \mathbb{E}(XZ) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X \cdot (XY)) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)^2\mathbb{E}(Y)$.
Or $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = np(1-p) + n^2p^2 = np(1 - p + np)$.
Ainsi $\mathrm{Cov}(X, Z) = (np)^2(1 - p + np) - (np)^3 = \boxed{n^2p^2(1-p)}$.

On a $\rho_{X,Z} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X, Z)}{\sigma(X)\sigma(Z)}$.
On a $\mathbb{V}(Z) = \mathbb{V}(XY) = \mathbb{E}(X^2Y^2) - \mathbb{E}(XY)^2 = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(X)^2\mathbb{E}(Y)^2 = \mathbb{E}(X^2)^2 - \mathbb{E}(X)^4$
$= n^2p^2(1 - p + np)^2 - n^4p^4 = (np)^2\big((1 - p + np)^2 - (np)^2\big) = (np)^2\big((1 - p + np)^2 - (np)^2\big)$
$= (np)^2(1-p)(1 - p + 2np)$.

Ainsi $\rho_{X,Z} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X, Z)}{\sigma(X)\sigma(Z)} = \dfrac{n^2p^2(1-p)}{\sqrt{np(1-p)(np)^2(1-p)(1-p+2np)}} = \sqrt{\dfrac{1}{np(1-p+2np)}}$

Exercice 7 : On dit que le couple de variable aléatoire (X, Y) est suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]^2$ si et seulement si tous les couples $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ ont autant de chance d'être atteint par le couple (X, Y). Dans ce cas, X et Y sont elles indépendantes ?

.....

On a $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = a$, il est assez facile de calculer a, en effet on a :
$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a = an^2$ donc $a = \dfrac{1}{n^2}$.
De plus on peut déterminer les lois marginales.
On a $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(X = i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n^2} = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$.
Ainsi $X \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$ et de même, on peut montrer que $Y \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$.
On a donc $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $\mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j) = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n^2} = \mathbb{P}(X = i, Y = j)$.

Les variables sont donc indépendantes.

Exercice 8 : Soit $X, Y \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$ indépendantes, donner la loi, l'espérance et la variance des lois suivantes :
1) $X+Y$ **2)** $\max(X,Y)$ **3)** $\min(X,Y)$.

.....

Réponses : **1)** On pose $Z = X+Y$. On a $\boxed{Z(\Omega) = [\![2, 2n]\!]}$.

Par ailleurs, si $k \in [\![2,n]\!]$, On a $(Z=k) = \bigcup_{i=1}^{k-1} (X=i) \cap (Y=k-i)$.

C'est une union disjointe, on trouve donc :

$\mathbb{P}(Z=k) = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}((X=i)\cap(Y=k-i)) = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i)$ par indépendance.

Donc $\mathbb{P}(Z=k) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{n^2} = \frac{k-1}{n^2}$ et si $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, on a $(Z=k) = \bigcup_{i=k-n}^{n} (X=i)\cap(Y=k-i)$

Car $X+Y=k \implies Y = k-X \in [\![1,n]\!]$. Or $1 \leq k-i \leq n \iff k-n \leq i \leq k-1$.

On obtient donc cette fois $\mathbb{P}(Z=k) = \sum_{i=k-n}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{2n-k+1}{n^2}$

Pour résumer, on a $\forall k \in [\![2,2n]\!]$, $\boxed{\mathbb{P}(Z=k) = \frac{|k-n|+n-1}{n^2}}$

On a par ailleurs $\boxed{\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y) = n+1}$ et de même $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y) = \boxed{\frac{n^2-1}{6}}$ par indépendance

2) On pose $Z = \max(X,Y)$, on a $\boxed{Z(\Omega) = [\![1,n]\!]}$.

Par ailleurs, si $k \in [\![1,n]\!]$, on a $\mathbb{P}(Z \leq k) = \mathbb{P}((X\leq k)\cap(Y\leq k)) = \mathbb{P}(X\leq k)\mathbb{P}(Y\leq k) = \frac{k^2}{n^2}$

On en déduit $\mathbb{P}(Z=k) = \mathbb{P}(Z\leq k) - \mathbb{P}(Z\leq k-1) = \frac{k^2-(k-1)^2}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2}$

En conclusion $\boxed{\forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}(Z=k) = \frac{2k-1}{n^2}}$

On a $\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=1}^{n} k\frac{2k-1}{n^2} = \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{2n(2n+1)(n+1)}{6n^2} - \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{(n+1)(2n+1)}{3n^2} - \frac{n+1}{n}$

$= \frac{n+1}{6n}(4n+2-3) = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}$. Finalement on trouve $\boxed{\mathbb{E}(Z) = \frac{(n+1)(4n-1)}{6n}}$

Pour la variance, il y a de plus gros calculs :

$\mathbb{E}(Z^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2\frac{2k-1}{n^2} = \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^3 - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2}{n^2}\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}$

$= \frac{n+1}{6n}(3(n+1)^2 - 2(2n+1)) = \frac{n+1}{6n}(3n^2+3n+1)$

et donc $\mathbb{V}(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2 = \frac{n+1}{6n}(3n^2+3n+1) - \frac{(n+1)^2(4n-1)^2}{36n^2} = \frac{n+1}{36n^2}(6n(3n^2+3n+1) + (n+$

$1)(4n-1)^2) = \frac{n+1}{36n^2}(2n^3-2n^2+n-1) = \frac{(n+1)(n-1)}{36n^2}(2n^2+1)$

En réécrivant encore, on trouve finalement : $\boxed{\mathbb{V}(Z) = \frac{(n^2-1)(2n^2+1)}{36n^2}}$

3) On pose $Z = \min(X,Y)$, on a $\boxed{Z(\Omega) = [\![1,n]\!]}$.

Par ailleurs, si $k \in [\![1,n]\!]$, on a $\mathbb{P}(Z\geq k) = \mathbb{P}((X\geq k)\cap(Y\geq k)) = \mathbb{P}(X\geq k)\mathbb{P}(Y\geq k) = \frac{(n-k+1)^2}{n^2}$

On en déduit $\mathbb{P}(Z=k) = \mathbb{P}(Z\geq k) - \mathbb{P}(Z\geq k+1) = \frac{(n-k+1)^2-(n-k)^2}{n^2} = \frac{2(n-k)+1}{n^2}$

En conclusion $\boxed{\forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathbb{P}(Z=k) = \frac{2n-2k+1}{n^2}}$

Pour l'espérance, on peut résonner à partir de la question précédente, en utilisant :
$X + Y = \max(X, Y) + \min(X, Y)$

Ainsi $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X + Y - \min(X, Y)) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(\min(X, Y)) = n + 1 - \dfrac{(n+1)(4n-1)}{6n} = \dfrac{(n+1)(6n-(4n-1))}{6n} = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n}$ Finalement $\boxed{\mathbb{E}(Z) = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n}}$

Malheureusement, on ne peut pas utiliser cette astuce pour la variance car le min et le max ne sont pas indépendants.

Mais il y a une autre astuce (qui tue). On peut remarquer que $\min(n+1-X, n+1-Y) = n+1-\max(X, Y)$. En effet si X est le max de X, Y alors $n+1-X$ est le min de $n+1-X, n+1-Y$. OR $n+1-X \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$ et pareil pour $n+1-Y \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$. On peut donc se ramener au cas précédent.

On a donc $\mathbb{V}(Z) = \mathbb{V}((n+1) - \min(n+1-X, n+1-Y)) = \mathbb{V}(\min(n+1-X, n+1-Y)) = \dfrac{(n^2-1)(2n^2+1)}{36n^2}$ d'après la question précédente car $n+1-X$ et $n+1-Y$ suivent la loi uniforme et sont indépendants. Finalement $\boxed{\mathbb{V}(Z) = \dfrac{(n^2-1)(2n^2+1)}{36n^2}}$.

Exercice 9 : Dans un restaurant, des clients prennent une entrée avec une probabilité $p \in]0,1[$, si l'entrée n'a pas été choisie, alors les clients prennent un dessert avec une probabilité $1-p$. Un client peut donc ne choisir ni un dessert, ni une entrée.
On note X le nombre de clients prenant un dessert et Y le nombre de clients prenant une entrée. On suppose de plus que le nombre total de clients suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
1) Déterminer la loi du couple (X,Y) et en déduire les lois marginales de X et Y.
2) X et Y sont elles indépendantes ? **3)** Calculer $\mathbb{E}(XY)$ et $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

.....

1) On note N le nombre de clients.

$$\mathbb{P}(X=i,Y=j) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=i,Y=j,N=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N=n)\mathbb{P}_{(N=n)}(X=i)\mathbb{P}_{(N=n,X=i)}(Y=j)$$

$$= \sum_{n=i+j}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\binom{n-i}{j}(1-p)^j p^{n-i-j} = \sum_{n=i+j}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\frac{n!}{i!(n-i)!}\frac{(n-i)!}{j!(n-i-j)!}(1-p)^{n-i+j}p^{n-j}$$

$$= \frac{p^{-j}(1-p)^{j-i}e^{-\lambda}}{i!j!}\sum_{n=i+j}^{+\infty}\frac{(\lambda(1-p)p)^n}{(n-i-j)!} = \frac{p^{-j}(1-p)^{j-i}e^{-\lambda}}{i!j!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda(1-p)p)^{n+i+j}}{n!}$$

$$= \frac{p^{-j}(1-p)^{j-i}e^{-\lambda}}{i!j!}(\lambda(1-p)p)^{i+j}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda(1-p)p)^n}{n!} = \frac{p^i\lambda^{i+j}(1-p)^{i+j}e^{-\lambda}}{i!j!}e^{\lambda p(1-p)}$$

$$= \boxed{\frac{p^i(1-p)^{2j}\lambda^{i+j}}{i!j!}e^{\lambda[p(1-p)-1]}}$$

La loi marginale donne : $\mathbb{P}(X=i) = \sum_{j=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=i,Y=j) = \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{p^i\lambda^{i+j}(1-p)^{2j}}{i!j!}e^{\lambda[p(1-p)-1]}$

$$= \frac{p^i\lambda^i}{i!}e^{\lambda[p(1-p)-1]}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\lambda^j(1-p)^{2j}}{j!} = \frac{p^i\lambda^i}{i!}e^{\lambda[p(1-p)-1]}e^{\lambda(1-p)^2} = \frac{p^i\lambda^i}{i!}e^{-\lambda p} \quad \text{Donc } \boxed{X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)}$$

$$\mathbb{P}(Y=j) = \sum_{i=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=i,Y=j) = \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{p^i\lambda^{i+j}(1-p)^{i+j}}{i!j!}e^{\lambda[p(1-p)-1]}$$

$$= \frac{(1-p)^{2j}\lambda^j}{j!}e^{\lambda[p(1-p)-1]}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{p^i\lambda^i}{i!} = \frac{(1-p)^{2j}\lambda^j}{j!}e^{\lambda[p(1-p)-1]}e^{\lambda p} = \frac{(1-p)^{2j}\lambda^j}{j!}e^{-\lambda(1-p)^2} \quad \text{Donc } \boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda(1-p)^2)}$$

2) On a $\mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j) = \frac{p^i(1-p)^{2j}\lambda^{i+j}}{i!j!}e^{-\lambda p-\lambda(1-p)^2}$
Or $-\lambda p - \lambda(1-p)^2 = -\lambda(p-p^2+2p-1) = \lambda(-p^2+p-1) = \lambda(p(1-p)-1)$
Donc $\mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j) = \mathbb{P}(X=i,Y=j)$ ainsi $\boxed{\text{les variables sont indépendantes.}}$
3) $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \lambda^2(1-p)^2p$ et $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ par indépendance.

Exercice 10 : Soit $\mu > \lambda > 0$ et soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$. Montrer que Y suit une loi de Poisson.

.....

On peut deviner que le paramètre de la loi de Y sera $\mu - \lambda$ d'après la stabilité de la loi de Poisson.

On utilise $\mathbb{P}(X+Y=n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X+Y=n \cap Y=k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=n-k)\mathbb{P}(Y=k)$.

Pour $k \in \mathbb{N}$, on va montrer par récurrence forte que $\mathbb{P}(Y=k) = \dfrac{(\mu-\lambda)^k}{k!}e^{-\lambda}$

Initialisation : Pour $k=0$, on a $\mathbb{P}(X+Y=0) = \mathbb{P}(X=0 \cap Y=0) = \mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=0)$

Donc $\mathbb{P}(Y=0) = \dfrac{\mathbb{P}(X+Y=0)}{\mathbb{P}(X=0)} = \dfrac{e^{-\mu}}{e^{-\lambda}} = e^{-(\mu-\lambda)} = \dfrac{(\mu-\lambda)^0}{0!}e^{-(\mu-\lambda)}$. Donc c'est vrai pour $k=0$.

Herédité : Si C'est vrai pour tous les $i \in [\![1,k]\!]$, on démontre que c'est vrai au rang $k+1$:

On a $\mathbb{P}(X+Y=k+1) = \sum_{i=0}^{k+1} \mathbb{P}(X=k+1-i)\mathbb{P}(Y=i) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X=k+1-i)\mathbb{P}(Y=i) + \mathbb{P}(X=0)\mathbb{P}(Y=k+1)$

Donc par hypothèse de récurrence :

$$\mathbb{P}(Y=k+1) = \frac{1}{\mathbb{P}(X=0)}\mathbb{P}(X+Y=k+1) - \frac{1}{\mathbb{P}(X=0)}\sum_{i=0}^{k}\mathbb{P}(X=k+1-i)\mathbb{P}(Y=i)$$

$$= \frac{1}{e^{-\lambda}}\frac{\mu^{k+1}}{(k+1)!}e^{-\mu} - \frac{1}{e^{-\lambda}}\sum_{i=0}^{k+1}\frac{\lambda^k}{(k+1-i)!}e^{-\lambda}\frac{(\mu-\lambda)^i}{i!}e^{-(\mu-\lambda)}$$

$$= \frac{\mu^{k+1}}{(k+1)!}e^{-(\mu-\lambda)} - e^{-(\mu-\lambda)}\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda^{k+1-i}}{(k+1-i)!}\frac{(\mu-\lambda)^i}{i!}$$

$$= e^{-(\mu-\lambda)}\left(\frac{\mu^{k+1}}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!}\sum_{i=0}^{k}\frac{(k+1)!}{(k+1-i)!i!}\lambda^{k+1-i}(\mu-\lambda)^i\right)$$

$$= \frac{e^{-(\mu-\lambda)}}{(k+1)!}\left(\mu^{k+1} - \sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}\lambda^{k+1-i}(\mu-\lambda)^i\right)$$

$$= \frac{e^{-(\mu-\lambda)}}{(k+1)!}\left(\mu^{k+1} - \sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}\lambda^{k+1-i}(\mu-\lambda)^i + (\mu-\lambda)^{k+1}\right)$$

$$= \frac{e^{-(\mu-\lambda)}}{(k+1)!}\left(\mu^{k+1} - (\lambda+\mu-\lambda)^{k+1} + (\mu-\lambda)^{k+1}\right) = \boxed{\frac{e^{-(\mu-\lambda)}}{(k+1)!}(\mu-\lambda)^{k+1}.}$$

(*) formule du binôme de Newton

C'est donc vrai au rang $k+1$.

Conclusion On a bien $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(Y=k) = \dfrac{(\mu-\lambda)^k}{k!}e^{-(\mu-\lambda)}$.

Ainsi $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu-\lambda)}$

Exercice 11 : Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que X est indépendante de $X+Y$. Que peut-on dire de la loi de X ?

.....

Attention on ne dit pas dans l'énoncé que X et Y sont indépendantes !

On peut remarquer que par indépendance $\mathrm{Cov}(X, X+Y) = 0 = \mathbb{V}(X) + \mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{V}(X)$.

Ainsi $\mathbb{V}(X) = 0 \implies X$ suit la loi certaine égale à $\mathbb{E}(X)$.

Donc X suit une loi certaine.

Exercice 12 : Soit $p \in]0,1[$ et X et Y indépendantes suivant la loi $\mathcal{G}(p)$.
1) Pour $r \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathbb{P}(X = rY)$
2) Soit $Ma = \max(X,Y)$ et $Mi = \min(X,Y)$, déterminer la loi du couple (Ma, Mi).
3) Déterminer les lois de Ma et de Mi.

.....

1) On a $\mathbb{P}(X = rY) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = rY \cap Y = i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = ri \cap Y = i) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = ri)\mathbb{P}(Y = i)$

$= \sum_{i=1}^{+\infty} p(1-p)^{ri-1} p(1-p)^{i-1} = \frac{p^2(1-p)^{(r+1)}}{(1-p)^2} \sum_{i=1}^{+\infty} (1-p)^{(r+1)i} = \frac{p^2}{(1-p)^2} \frac{1}{1-(1-p)^{r+1}} = \boxed{\frac{p^2(1-p)^{r-1}}{1-(1-p)^{r+1}}}$

2) $\mathbb{P}(Mi = i, Ma = j) = 0$ si $i > j$.

Si $i < j$: $\mathbb{P}(Mi = i, Ma = j) = \mathbb{P}((X = i, Y = j) \cup (X = j, Y = i)) = \mathbb{P}(X = i, Y = j) + \mathbb{P}(X = j, Y = i)$
$= \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j) + \mathbb{P}(X = j)\mathbb{P}(Y = i) = 2p^2(1-p)^{i+j-2}$.

Enfin si $i = j$ alors $\mathbb{P}(Mi = i, Ma = i) = \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = i) = p^2(1-p)^{2i-2}$

Pour résumer : $\boxed{\forall (i,j) \in \mathbb{N}^* \ , \ \mathbb{P}(Mi = i, Ma = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ p^2(1-p)^{2i-2} & \text{si } i = j \\ 2p^2(1-p)^{i+j-2} & \text{si } i < j \end{cases}}$

3) On a $\mathbb{P}(Mi = i) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Mi = i, Ma = j) = 0 + \mathbb{P}(Mi = i, Ma = i) + \sum_{j=i+1}^{+\infty} \mathbb{P}(Mi = i, Ma = j)$

$= p^2(1-p)^{2i-2} + \sum_{j=i+1}^{+\infty} 2p^2(1-p)^{i+j-2} = p^2(1-p)^{i-2}\left((1-p)^i + 2\sum_{j=i+1}^{+\infty}(1-p)^j\right) = p^2(1-p)^{i-2}\left((1-p)^i + 2\frac{(1-p)^{i+1}}{p}\right)$

$= p^2(1-p)^{2i-2}\left(1 + \frac{2-2p}{p}\right) = p(2-p)[(1-p)^2]^{i-1}$

On remarque que $\boxed{Mi \hookrightarrow \mathcal{G}(1-(1-p)^2)}$ car $1-(1-p)^2 = 2p - p^2 = p(2-p)$.

$\mathbb{P}(Ma = j) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Mi = i, Ma = j) = \sum_{i=1}^{j-1} \mathbb{P}(Mi = i, Ma = j) + \mathbb{P}(Mi = j, Ma = j) + 0$

$= \sum_{i=1}^{j-1} 2p^2(1-p)^{i+j-2} + p^2(1-p)^{2j-2} = p^2(1-p)^{j-2}\left(2\sum_{i=1}^{j-1}(1-p)^i + (1-p)^j\right) = p^2(1-p)^{j-2}\left(2(1-p)\frac{1-(1-p)^j}{p} + (1-p)^j\right)$

$= p(1-p)^{j-1}\big(2 - 2(1-p)^j + p(1-p)^{j-1}\big)$ $\boxed{= p(1-p)^{j-1}\big(2 - (2-p)(1-p)^{j-1}\big)}$

Exercice 13 : On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n telles que la boîte numéro k contienne k boules numérotées de 1 à k. On choisit une boîte de façon équiprobable puis une boule dans cette boîte. On note X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.
1) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
2) En déduire la seconde loi marginale. **3)** Déterminer $\mathbb{E}(Y)$.

.....

1) $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}_{(X=i)}(Y = j) = \frac{1}{n}\mathbb{P}_{(X=i)}(Y = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ \frac{1}{ni} & \text{si } i \geq j \end{cases}$

2) $\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \sum_{i=j}^{i} \frac{1}{ni} = \boxed{\frac{1}{n}\sum_{i=j}^{n} \frac{1}{i}}$.

3) $\mathbb{E}(Y) = \sum_{j=1}^{n} j\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}\sum_{i=j}^{n} \frac{1}{i} = \frac{1}{n}\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} \frac{j}{i} = \frac{1}{n}\frac{n(n+3)}{4} = \boxed{\frac{n+3}{4}}$. Voir l'exercice 1.

Exercice 14 : Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi : $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{-1, 1\}$, $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(Y = -1) = \frac{1}{2}$.
On note $U = X + Y$, $V = XY$.
1) Donner la loi conjointe du couple (U, V), en déduire les lois marginales de U et V.
2) Calculer $\mathrm{Cov}(U, V)$. **3)** U et V sont elles indépendantes ?

.....

1) On peut faire un tableau :

$U\backslash V$	-1	1	U
-2	0	$1/4$	$1/4$
0	$1/2$	0	$1/2$
2	0	$1/4$	$1/4$
V	$1/2$	$1/2$	1

2) On note que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = 0$ et donc On a $\mathbb{E}(UV) = \mathbb{E}((X + Y)XY) = \mathbb{E}(X^2)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y^2) = 0$.
On a $\mathbb{E}(U)\mathbb{E}(V) = 0 \times \mathbb{E}(V) = 0$ car $\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 0$.
Donc $\mathrm{Cov}(U, V) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0$.

3) On a $\mathbb{P}(U = 2, V = 1) = 0$, or $\mathbb{P}(V = 1)\mathbb{P}(U = 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$. Les variables ne sont donc pas indépendantes