

Devoir Surveillé 2

Durée 2h , Samedi 26 septembre 2026

Exercice 1 (d'après EDHEC, ECS, 2013)

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs telle que la série de terme général $\frac{1}{a_n}$ converge. Le but de cet exercice est de prouver que la série de terme général

$$u_n = \frac{n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

converge également et que

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}.$$

1. *Étude d'un premier exemple* : pour tout entier $n \geq 1$, on pose $a_n = n(n+1)$.
 - a. Vérifier que $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ puis en déduire que la série de terme général $\frac{1}{a_n}$ converge et donner sa somme.
 - b. Pour tout entier $n \geq 1$, déterminer u_n en fonction de n .
 - c. Établir la convergence de la série de terme général u_n et donner sa somme, puis en déduire l'inégalité demandée.
2. *Étude d'un deuxième exemple* : on suppose dans cette question, que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $a_n = n!$
 - a. Justifier la convergence de la série de terme général $\frac{1}{a_n}$.
 - b. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $u_n \leq \frac{1}{(n-1)!}$.
 - c. En déduire que la série de terme général u_n converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$.

On revient au cas général.

3. Montrer que pour tous $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \times \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right).$$

Indication : on pourra considérer le discriminant du trinôme $P(\lambda) = \sum_{k=1}^n (x_k + \lambda y_k)^2$.

4. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (1 + 2 + \dots + n)^2 \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \times \left(\frac{1}{a_1} + \frac{4}{a_2} + \dots + \frac{n^2}{a_n} \right).$$

5. Utiliser le résultat précédent pour établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \leq 4 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{a_k}.$$

6. En déduire, par sommation, que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^N \frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \leq 4 \sum_{k=1}^N \frac{1}{a_k}.$$

7. Montrer enfin que la série de terme général $\frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$ converge puis établir le résultat demandé.

Exercice 2 (d'après ECRICOME, ECS, 2006)

On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant Pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et Face avec la probabilité $q = 1 - p$.

On s'intéresse dans cette exercice à la probabilité d'avoir une infinité de fois deux Pile consécutifs.

1. Montrer que pour tout réel x , on a $1 - x \leq e^{-x}$.
2. On considère dans cette question une suite $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ d'événements indépendants. On suppose que la série de terme général $\mathbb{P}(A_i)$ diverge.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour $n \geq k$, on note

$$C_n = \bigcup_{i=k}^n A_i = A_k \cup \dots \cup A_n.$$

- a. Justifier que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=k}^n \mathbb{P}(A_i) = +\infty.$$

- b. Montrer que

$$\mathbb{P}(C_n) = 1 - \prod_{i=k}^n \mathbb{P}(\overline{A_i})$$

puis, en utilisant la question 1, que

$$\mathbb{P}(C_n) \geq 1 - \exp\left(-\sum_{i=k}^n \mathbb{P}(A_i)\right).$$

En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(C_n) = 1.$$

- c. En déduire que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i\right) = 1.$$

- d. Justifier que

$$\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i = \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$$

et en déduire que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) = 1.$$

3. En considérant les événements A_n « on obtient Pile au $(2n)$ -ème et au $(2n + 1)$ -ème », montrer que la probabilité d'avoir deux Pile consécutifs après n'importe quel lancer vaut 1.

Exercice 3

On dispose d'une urne contenant au départ une boule blanche et on joue indéfiniment à Pile ou Face avec une pièce équilibrée (les lancers sont indépendants). À chaque fois que l'on obtient Face, on rajoute une boule noire dans l'urne et la première fois que l'on obtient Pile, on tire au hasard une boule dans l'urne. Si on n'obtient jamais Pile, on se fait donner une boule blanche. On veut calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche.

On note B l'évènement « on obtient une boule blanche », pour tout $n \geq 1$, A_n désigne l'évènement « Pile apparaît pour la première fois au n -ème lancer » et A_0 est l'évènement « Pile n'apparaît jamais ».

Remarque : Les questions 3.a, 3.b et 3.c ne font pas appel aux probabilités et peuvent être traitées indépendamment du reste de l'exercice.

1. Montrer que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un système *quasi*-complet d'évènements. Que peut-on en déduire sur la probabilité de A_0 ?
2. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n}.$$

3. *Calcul de la somme d'une série.*

Pour tout entier $N \geq 1$, on considère la fonction $F_N : x \mapsto \sum_{n=1}^N \frac{x^n}{n}$ définie sur $[0, 1[$.

- a. Montrer que

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0, 1[, \quad F_N(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \int_0^x \frac{t^N}{1-t} dt.$$

- b. Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^N}{1-t} dt = 0.$$

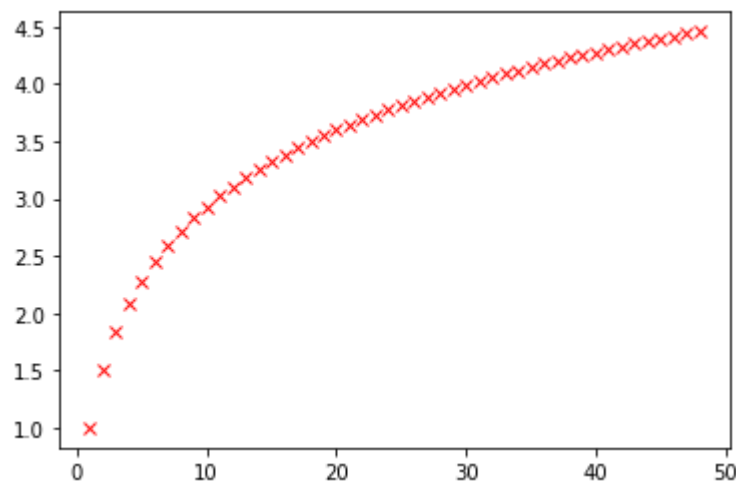
- c. En déduire que pour tout $x \in [0, 1[$, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{x^n}{n}$ converge et donner la valeur de sa somme.
- d. Conclure sur la valeur de $\mathbb{P}(B)$.

Exercice 4 (Informatique)

Dans cet exercice, on cherche à calculer la plus grande somme de termes consécutifs dans une liste.

Par exemple, dans la liste $[1, 2, 3, 5, 6, 1, 2, 6]$ si on somme les termes consécutifs trois par trois, on obtient la somme la plus grande en faisant $3+5+6 = 14$.

1. Coder une fonction python `somme_3termes(L)` qui prend en entrée une liste `L` et qui retourne la plus grande somme de trois termes consécutifs dans la liste `L`. La fonction doit renvoyer `False` si la liste contient strictement moins de 3 termes.
2. On veut maintenant que la fonction python calcule la somme la plus grande somme de `n` termes consécutifs de la liste. Coder `somme_termes(L,n)` qui prend en entrée une liste `L`, un entier `n` supérieur à 1 et qui retourne la plus grande somme de `n` termes consécutifs dans la liste `L`. La fonction doit renvoyer `False` si la liste contient moins de `n` termes.
3. En utilisant le module `matplotlib.pyplot`, coder une fonction `graphe_somme(L)` qui prend en entrée une liste `L` et qui affiche une représentation graphique de la plus grande somme de `n` termes consécutifs de `L` en fonction de `n` (pour `n` compris entre 1 et la longueur de la liste).
4. Pour la liste `L = [1/i for i in range(1,50)]`, la fonction `graphe_somme(L)` affiche le graphe ci-dessous. Interpréter mathématiquement le résultat observé



4. Pour la liste `L = [i for i in range(1,50)]`, la fonction `graphe_somme(L)` affiche le graphe ci-dessous. Donner l'équation de la courbe tracée en fonction de `n`.

