

e. Soit n un élément de $\llbracket 2, +\infty \rrbracket$.

$$\forall s \in [0, 1], G_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} s \text{ donc } \forall s \in [0, 1], G'_n(s) = (n-1) \frac{1}{2} \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-2} s + \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1}.$$

$$\text{Alors } E(N_n) = G'_n(1) = (n-1) \frac{1}{2} \left(\frac{1+1}{2}\right)^{n-2} \times 1 + \left(\frac{1+1}{2}\right)^{n-1} = (n-1) \frac{1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}.$$

Ainsi $E(N_n) = \frac{n+1}{2}$. Notons que ceci vaut encore pour $n = 1$ car $E(N_1) = 1$. Par conséquent :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, E(N_n) = \frac{n+1}{2}.}$$

▲ *Exercice* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Utiliser G''_n pour montrer que $V(N_n) = \frac{n-1}{4}$. ▼

Partie III : Probabilité d'avoir une infinité de fois deux Piles consécutifs.

1. $\varphi : x \rightarrow e^{-x}$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi''(x) = e^{-x} \geq 0$. Ainsi φ est convexe sur $\mathbb{R}$.

La courbe représentative de φ est au-dessus de toutes ses tangentes en particulier de celle au point d'abscisse 0.

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) \geq \varphi'(0)(x-0) + \varphi(0)$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} \geq (-1) \times x + 1 = 1 - x$. Finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, 1 - x \geq e^{-x}.}$$

2. a. La série de terme général $P(A_i)$ est à termes positifs et divergente donc la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=k}^n P(A_i) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i=1}^{k-1} P(A_i) \right) = +\infty$ (à un petit abus près au niveau de l'avant dernière égalité).

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=k}^n P(A_i) = +\infty.}$$

b. Soit n un élément de $\llbracket k, +\infty \rrbracket$. $P(C_n) = 1 - P(\overline{C_n}) = 1 - P\left(\bigcup_{i=k}^n A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=k}^n \overline{A_i}\right)$.

Comme $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements indépendants, $(\overline{A_i})_{i \in \mathbb{N}^*}$ est encore une suite d'événements indépendants.

Ceci permet d'écrire que : $P(C_n) = 1 - \prod_{i=k}^n P(\overline{A_i})$.

$$\boxed{\forall n \in \llbracket k, +\infty \rrbracket, P(C_n) = 1 - \prod_{i=k}^n P(\overline{A_i}).}$$

Soit n un élément de $\llbracket k, +\infty \rrbracket$. $\forall i \in \llbracket k, n \rrbracket, 0 \leq P(\overline{A_i}) = 1 - P(A_i) \leq \exp(-P(A_i))$ d'après 1.

Par produit : $\prod_{i=k}^n P(\overline{A_i}) \leq \prod_{i=k}^n \exp(-P(A_i)) = \exp\left(-\sum_{i=k}^n P(A_i)\right)$.

Alors $P(C_n) = 1 - \prod_{i=k}^n P(\overline{A_i}) \geq 1 - \exp\left(-\sum_{i=k}^n P(A_i)\right)$.

$$\boxed{\forall n \in \llbracket k, +\infty \rrbracket, P(C_n) \geq 1 - \exp\left(-\sum_{i=k}^n P(A_i)\right)}.$$

$\forall n \in \llbracket k, +\infty \rrbracket, 1 \geq P(C_n) \geq 1 - \exp\left(-\sum_{i=k}^n P(A_i)\right)$.

Le **a.** nous a montré que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=k}^n P(A_i) = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(-\sum_{i=k}^n P(A_i)\right) = 0$.

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \exp\left(-\sum_{i=k}^n P(A_i)\right)\right) = 1$ et par encadrement on obtient :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} P(C_n) = 1.}$$

c. $\forall n \in \llbracket k, +\infty \rrbracket, C_n = \bigcup_{i=k}^n A_i \subset \bigcup_{i=k}^{n+1} A_i = C_{n+1}$.

$$\boxed{\forall n \in \llbracket k, +\infty \rrbracket, C_n \subset C_{n+1}. \text{ La suite } (C_n)_{n \geq k} \text{ est croissante.}}$$

Le théorème de la limite monotone montre alors que $P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(C_n) = 1$. Ainsi :

$$\boxed{P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} C_i\right) = 1.}$$

d. • Soit i un élément de $\llbracket k, +\infty \rrbracket$. $A_i \subset \bigcup_{j=k}^i A_j = C_i \subset \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$.

Ainsi $\forall i \in \llbracket k, +\infty \rrbracket, A_i \subset \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$. Donc $\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i \subset \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$.

• Soit ω un élément de $\bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$. Alors il existe r dans $\llbracket k, +\infty \rrbracket$ tel que $\omega \in C_r$.

Or $C_r = \bigcup_{i=k}^r A_i$; ainsi il existe un élément i_0 de $\llbracket k, r \rrbracket$, donc de $\llbracket k, +\infty \rrbracket$, tel que $\omega \in A_{i_0}$.

Par conséquent $\omega \in \bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i$. Ceci achève de montrer que $\bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n \subset \bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i$. Finalement : $\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i = \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n$.

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i = \bigcup_{n=k}^{+\infty} C_n.$$

Il résulte alors du c) que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) = 1.$$

▲ *Remarque* Notons que $\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante d'événements.

Alors $P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right)\right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) = 1$. Donc $P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right)\right) = 1$. Ceci ne signifie-t-il pas qu'il est presque sûr qu'un nombre infini d'événements de la suite $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ se réalisent ? ▼

▲ *Exercice 1* Justifier le dernier résultat de la remarque. ▼

▲ *Exercice 2* En supposant simplement que la série de terme général $P(A_n)$ converge (sans hypothèse d'indépendance) montrer qu'il est presque sûr que seul un nombre fini d'événements de la suite $(A_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ se réalisent. ▼

3. L'indépendance des lancers donne l'indépendance des événements de la suite $(P_{2n} \cap P_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ donc de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(A_n) = P(P_{2n} \cap P_{2n+1}) = P(P_{2n})P(P_{2n+1}) = p^2$. Donc la série de terme général $P(A_n)$ diverge car la suite de terme général $P(A_n)$ ne converge pas vers zéro..

Alors, d'après la question précédente : $\forall k \in \mathbb{N}^*, P\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_i\right) = 1$.

Cela signifie que la probabilité d'obtenir deux Piles consécutifs à partir du $(2k)^{\text{ème}}$ lancer vaut 1 pour tout élément k de $\mathbb{N}^*$. Alors nécessairement :

la probabilité d'avoir deux Piles consécutifs après n'importe quel lancer vaut 1.