

CORRIGÉ DU DM1

Exercice 1

1.a. Étant donné un entier n supérieur ou égal à 1, on a : $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{a_n}$. On a montré que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{a_n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Étant donné un entier n supérieur ou égal à 1, on note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$ la somme partielle de rang n associée à la série de terme général $\frac{1}{a_n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$). D'après ce qui précède, $S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$ (par télescopage), donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$.

Conclusion :

la série de terme général $\frac{1}{a_n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) converge et sa somme vaut 1.

1.b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{cours}).$$

D'où,

$$\sum_{k=1}^n a_k = \frac{n(n+1)}{6}(2n+1+3) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3},$$

et enfin :

$$u_n = \frac{n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = \frac{3}{(n+1)(n+2)}.$$

Conclusion

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{3}{(n+1)(n+2)}.$$

1.c. La somme partielle de rang n ($n \in \mathbb{N}^*$) associée la série de terme général u_n est :

$$T_n = \sum_{k=1}^n u_k = 3 \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_{k+1}} = 3 \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{a_k} = 3 \left(\left[\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{a_k} \right] - \frac{1}{a_1} \right).$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{a_k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_{n+1} = 1$ d'après la question **1.a** et $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{2}$. Donc la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et sa limite vaut $\frac{3}{2}$. Dit autrement, la série de terme général u_n converge et sa somme vaut $\frac{3}{2}$. De plus :

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n}_{=\frac{3}{2}} \leq 2 \times \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}}_{=1}.$$

2.a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{n!}$. D'après le cours, pour tout réel x , la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge (série exponentielle). La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!}$ converge donc elle aussi.

Conclusion :

$$\text{la série } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{a_n} \text{ converge.}$$

2.b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n k! \geq n! > 0$, d'où $\frac{1}{\sum_{k=1}^n a_k} \leq \frac{1}{n!}$. Comme $n > 0$, on en déduit que :

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n a_k}_{=u_n} \leq \underbrace{\frac{n}{n!}}_{=\frac{1}{(n-1)!}}.$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq \frac{1}{(n-1)!}.$$

2.c. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{(n-1)!}$ (*) d'après la question précédente et la définition de u_n . Or, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n-1)!}$ converge (car la série (exponentielle) $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$ converge). D'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En additionnant membre à membre l'encadrement (*) pour $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on obtient :

$$0 \leq \sum_{n=1}^N u_n \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{(n-1)!}$$

Puis, en passant à la limite dans les inégalités larges, on obtient :

$$0 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

De plus, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \right) - 1 = e - 1$. Enfin, $e < 2(e - 1)$ (car $e < 2$).

Conclusion :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}.$$

3. Soient $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. On considère le polynôme P de degré 2^1 , à coefficients réels, défini par :

$$P(\lambda) = \sum_{k=1}^n (x_k + \lambda y_k)^2 = \lambda^2 \sum_{k=1}^n y_k^2 + 2\lambda \sum_{k=1}^n x_k y_k + \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

Par définition de P , pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $P(\lambda) \geq 0$ (c'est une somme de carrés). Le discriminant Δ de P est donc négatif ou nul, c'est-à-dire :

$$\Delta = 4 \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 - 4 \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \times \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right) \leq 0.$$

Conclusion

$$\boxed{\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \times \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right).}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec :

$$x_k = \sqrt{a_k} \quad \text{et} \quad y_k = \frac{k}{\sqrt{a_k}} \quad (k \in \llbracket 1, n \rrbracket).$$

1. On suppose ici que les réels $y_1, \dots, y_n$ ne sont pas tous nuls (ce qui assure que P est bien de degré exactement 2) ; dans le cas contraire l'inégalité est immédiate.

On obtient :

$$\left(\sum_{k=1}^n \sqrt{a_k} \cdot \frac{k}{\sqrt{a_k}} \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{a_k} \right)^2 \times \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{\sqrt{a_k}} \right)^2 \right),$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\left(\sum_{k=1}^n k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \times \left(\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{a_k} \right)}.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$4 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = 4 \cdot \frac{(n+1)^2 - n^2}{(n(n+1))^2} = 4 \cdot \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2}{(n(n+1))^2} = 4 \cdot \frac{2n+1}{(n(n+1))^2} = \frac{2n+1}{\left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2}.$$

Or $\frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + \dots + n$. Donc,

$$4 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) = \frac{2n+1}{(1+2+\dots+n)^2}.$$

Dans l'inégalité de la question 4, tous les termes sont strictement positifs, donc :

$$\frac{1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \leq \frac{1}{(1+2+\dots+n)^2} \times \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{a_k}.$$

Comme $2n+1 > 0$, on en déduit que :

$$\frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \leq \frac{2n+1}{(1+2+\dots+n)^2} \times \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{a_k} = 4 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{a_k}.$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \leq 4 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{a_k}}.$$

6. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En sommant membre à membre les inégalités obtenues à la question précédente pour n allant de 1 à N , on obtient :

$$\sum_{n=1}^N \frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \leq \underbrace{\sum_{n=1}^N \left[4 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{a_k} \right]}_{=: A_N}.$$

Réécrivons A_N :

$$\begin{aligned} A_N &= 4 \sum_{n=1}^N \left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \frac{k^2}{a_k} \right] \\ &= 4 \sum_{k=1}^N \left[\sum_{n=k}^N \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \frac{k^2}{a_k} \right] \quad (\text{permutation des symboles } \Sigma) \\ &= 4 \sum_{k=1}^N \left[\frac{k^2}{a_k} \sum_{n=k}^N \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \right] \\ &= 4 \sum_{k=1}^N \frac{k^2}{a_k} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(N+1)^2} \right) \quad (\text{téléscopage}). \end{aligned}$$

Or, pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $\frac{k^2}{a_k} > 0$ et $\frac{1}{k^2} - \frac{1}{N+1} \leq \frac{1}{k^2}$, donc :

$$\frac{k^2}{a_k} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(N+1)^2} \right) \leq \frac{k^2}{a_k} \cdot \frac{1}{k^2} = \frac{1}{a_k}.$$

Finalement, $A_N \leq 4 \sum_{k=1}^N \frac{1}{a_k}$. On a donc bien montré que :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^N \frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \leq 4 \sum_{k=1}^N \frac{1}{a_k}.$$

7. Par hypothèse, la série de terme général $\frac{1}{a_n}$ converge et c'est une série à termes positifs. Donc, la suite des sommes partielles associée est croissante et

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad 4 \sum_{n=1}^N \frac{1}{a_n} \leq 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}.$$

On en déduit, d'après la question précédentes, que :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^N \frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \leq 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}.$$

Les sommes partielles associées à la série de terme général $\frac{2n+1}{a_1+a_2+\dots+a_n} (> 0)$ sont donc majorées par la constante $4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$. La suite des sommes partielles est donc croissante et majorée, donc convergente. Autrement dit,

$$\boxed{\text{la série } \sum_{n \geq 1} \frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \text{ converge.}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$0 \leq u_n = \frac{n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \leq \frac{n+1/2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \quad (\star\star).$$

Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{2n+1}{a_1+a_2+\dots+a_n}$ converge, il en va de même de la série $\frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{2n+1}{a_1+a_2+\dots+a_n}$. D'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\boxed{\text{la série } \sum_{n \geq 1} u_n \text{ converge.}}$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En sommant membre à membre les inégalités $(\star\star)$ pour $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$ et en utilisant la question 6, on a :

$$\sum_{n=1}^N u_n \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \leq \frac{1}{2} \times 4 \times \sum_{n=1}^N \frac{1}{a_n}.$$

En faisant alors tendre N vers $+\infty$, on obtient finalement :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \leq \frac{1}{2} \times 4 \times \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n},$$

d'où :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \leq 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}.$$

Exercice 2

1.a. L'univers associé à cette expérience aléatoire est $\Omega_3 = \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$, chaque issue de l'expérience aléatoire étant représentée par un couple $(i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$ où i est le numéro de la boule tirée dans l'urne U (c'est aussi la valeur prise par la variable aléatoire X) et j le numéro de la boule tirée dans l'urne V (c'est aussi la valeur prise par la variable aléatoire Y). On se trouve par ailleurs dans une situation d'équiprobabilité : chaque issue de l'expérience aléatoire a une probabilité égale à $\frac{1}{\text{card}(\Omega_3)} = \frac{1}{9}$ de se réaliser. Explicitons E_3 :

$$E_3 = \left\{ (1, 1), (2, 1), (3, 1), (2, 2), (3, 3) \right\}.$$

D'où :

$$\mathbb{P}(E_3) = \frac{\text{card}(E_3)}{\text{card}(\Omega_3)} = \frac{5}{9}.$$

1.b. De façon analogue, l'univers associé à cette expérience aléatoire est $\Omega_4 = \llbracket 1, 4 \rrbracket^2$ et on se trouve à nouveau dans une situation d'équiprobabilité. On a :

$$E_4 = \left\{ (1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (2, 2), (4, 2), (3, 3), (4, 4) \right\}.$$

D'où :

$$\mathbb{P}(E_4) = \frac{\text{card}(E_4)}{\text{card}(\Omega_4)} = \frac{4}{16} = \frac{1}{2}.$$

2. Dans le cas général, l'univers associé à l'expérience aléatoire est $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket^2$ et on se trouve dans une situation d'équiprobabilité. Pour calculer $\mathbb{P}(E_n)$, on va utiliser la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements associé à la variable aléatoire Y qui peut prendre toutes les valeurs entières comprises entre 1 et n :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_n) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(E_n \cap (Y = k)) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\text{card}(E_n \cap (Y = k))}{\text{card}(\Omega)} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \text{card}(E_n \cap (Y = k)). \end{aligned}$$

Pour tout entier k compris entre 1 et n , le cardinal de $E_n \cap (Y = k)$ est égal au nombre de multiples de k inférieurs ou égaux à n , ce que l'on peut aussi écrire :

$$\text{card}(E_n \cap (Y = k)) = \max \left\{ \ell \in \mathbb{N}^* : \ell k \leq n \right\} = \max \left\{ \ell \in \mathbb{N}^* : \ell \leq \frac{n}{k} \right\} = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$$

la dernière égalité étant une conséquence immédiate de la définition de la partie entière.

Conclusion :

$$\mathbb{P}(E_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor = \frac{1}{n^2} \left(n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor \right).$$

3. Rappelons l'encadrement $x - 1 < [x] \leq x$ valable pour tout réel x . En utilisant cet encadrement pour chaque partie entière de la somme apparaissant dans la relation obtenue à la question précédente et en additionnant membre à membre, on obtient :

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{n}{k} - 1 \right) \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{n}{k}.$$

D'où :

$$-\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \mathbb{P}(E_n) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

4. On a vu dans le chapitre 1 que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1$ (*), ce que l'on admettra pour la suite même si ce n'est pas un résultat du cours. En multipliant chaque membre de l'encadrement obtenu à la question précédente par $\frac{n}{\ln(n)} > 0$, on obtient :

$$-\frac{1}{\ln(n)} + \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \frac{n}{\ln(n)} \mathbb{P}(E_n) \leq \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Rappelons que cet encadrement est valable pour tout entier n supérieur ou égal à 2.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0$. Donc, d'après (*) et par opérations sur les limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\ln(n)} + \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1.$$

Enfin, le théorème d'encadrement donne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\ln(n)} \mathbb{P}(E_n) = 1.$$

Conclusion :

$$\mathbb{P}(E_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}.$$

Complément : simulations numériques

```
1 def approx_proba_E(n):
2     n_rep = 50000
3     compt = 0
4     for _ in range(n_rep):
5         X = rd.randint(1, n)
6         Y = rd.randint(1, n)
7         if X \% Y == 0:
8             compt += 1
9     return compt/n_rep
```

Remarque : $X \% Y$ (sans le symbole backslash qu'il faut ignorer à la ligne 7) correspond au reste dans la division euclidienne de X par Y .

