

Programme de Colle - Semaine 4

2BCPST 2

5 octobre 2025

Année 2026 - 2027

On débutera la colle par une question de cours choisie parmi les questions listées à la fin du document

Probabilités sur un univers dénombrable

- Expérience aléatoire, univers Ω (dénombrable)
- tribus notée $\mathcal{A}$ (ensemble des évènements)
- Mesure de probabilité $\mathbb{P}$, espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
- Suite d'évènements disjoints, système complet d'évènements.
- Mesure de probabilités, probabilité de l'union d'évènement disjoints.
- Probabilité du complémentaire.
- Probabilité de l'union : $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
- Formule des probabilités totales
- Probabilité uniforme, situation d'équiprobabilité.
- Évènements indépendants, deux à deux indépendants, mutuellement indépendants.
- Probabilités conditionnelles.
- Formule de conditionnement : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)$. Adapter à l'intersection de 3 ou 4 évènements...
- Formule des probabilités totales (version conditionnelle).
- Forme de Bayes

Variables aléatoires

On peut poser des exercices de deuxième année, les thèmes sont les mêmes qu'en 1ère année, mais on peut avoir des univers dénombrables et du vocabulaire des séries pour l'espérance.

Variables aléatoires

- Variables aléatoires, définition. Notation $X(\Omega)$ pour l'univers image.
- Évènements élémentaires : $(X = x)$ avec $x \in X(\Omega)$.
- Évènements $(X \in I)$, $(X \geq k)$ etc...
- $((X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet.
- Opérations sur les variables aléatoires : $X + Y$, XY , $f(X)$ avec f une fonction.
- Loi d'une variable aléatoire : $X(\Omega)$ et $\forall x \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = x)$.
- $\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1$.
- Si X et Y ont la même loi alors $\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(Y \in I)$.
- Fonction de répartition F_X , propriétés.
- Indépendance des variables aléatoires, indépendance mutuelle.

Espérance, Variance

- Définition de l'espérance de X . définition variables centrées.
- Positivité, linéarité de l'espérance.
- Formule de transfert $\mathbb{E}(f(X))$.
- Si X et Y indépendantes alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$
- Variance et écart types définition et première propriétés.
- $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - E(X)^2$.
- $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

Lois usuelles

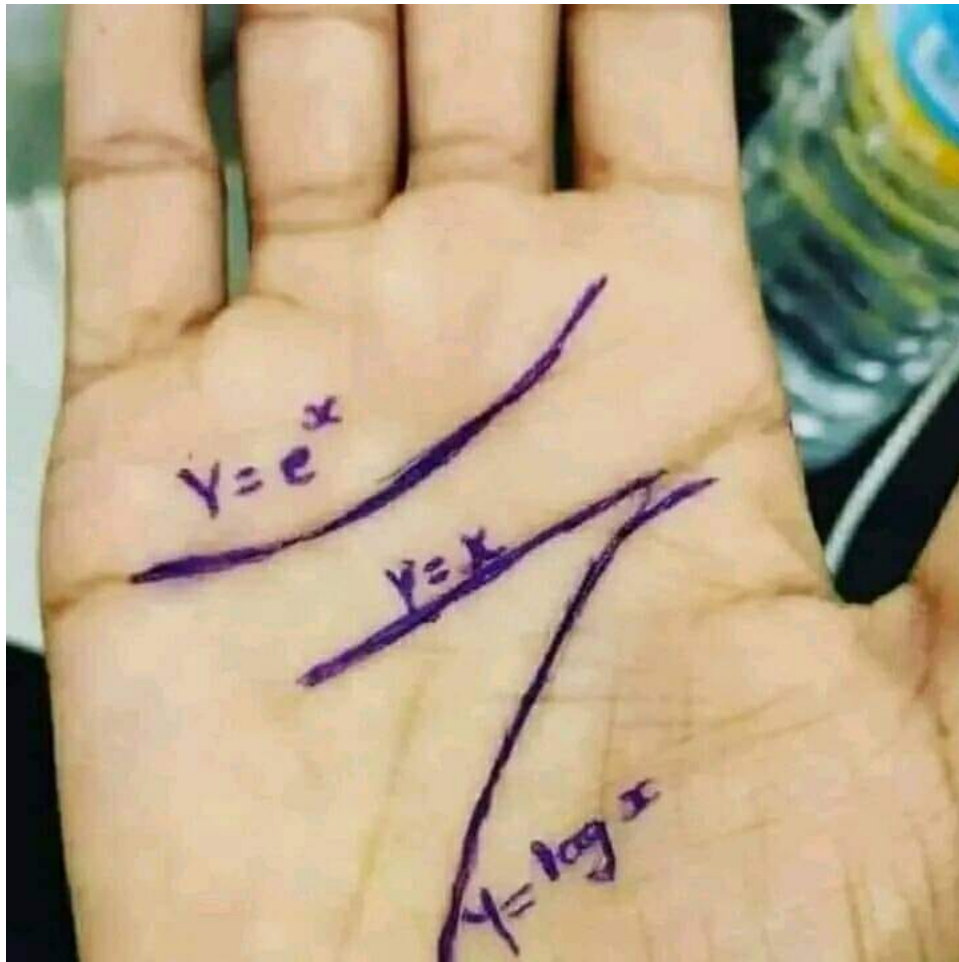
(Loi géométrique et Poisson pas encore vues)

- Loi Certaine : $X = a$, $\mathbb{E}(a) = a$ et $\mathbb{V}(a) = 0$
- Loi Uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$: $X \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$, $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$
- Loi de Bernoulli : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, $\mathbb{E}(X) = p$ et $\mathbb{V}(X) = p(1-p)$.
- Loi Binômiale : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$.
- La loi binômiale est celle d'une variable aléatoire qui compte le nombre de succès de n expériences de Bernouilli.

Question de Cours

27. Allure des représentations graphiques des fonctions exponentielle et logarithme népérien.
28. Allure des représentations graphiques des fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto \ln(1+x)$.
29. Allure des représentations graphiques des fonctions $x \mapsto \ln(x)$ et $x \mapsto |\ln(x)|$.
30. Allure des représentations graphique des fonctions $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto |x+1|$.
31. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
32. Énoncer le théorème de la bijection monotone.
104. Si A et B désignent deux évènements d'un même espace probabilisé, donner la définition de « A et B sont incompatibles » puis de « A et B sont indépendants ».
105. Définition d'un système complet d'évènements.
106. Donner la définition d'un événement négligeable et d'un événement quasi-certain.
107. Énoncer la formule des probabilités totales.
108. Énoncer la formule des probabilités composées.
109. Énoncer la formule de Bayes.
110. Définition de la notion d'indépendance mutuelle d'une famille d'évènements.
111. Donner la définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle. Donner son tableau de variation.

Meme de la semaine (en lien avec la question de cours n°27) :



(bon, on ne voit pas trop la symétrie entre exp et ln sur ce schéma, donc il a ses limites!)