Correction de l'exercice 1.

Correction de l'exercice 2.

Correction de l'exercice 3.

Correction de l'exercice 4.

Correction de l'exercice 5.

Correction de l'exercice 6. Soit $K \in \mathscr{P}(\llbracket 1\,;n \rrbracket)$, pour $k \in K$, on pose $B_k = A_k$ et pour $k \in \llbracket 1\,;n \rrbracket \backslash K$, on pose $B_k = \overline{A_k}$, alors $B_1, \ldots, B_n$ sont indépendants (d'après un résultat pas trop au programme), en particulier, $\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{n} B_k) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)$, ainsi,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in K} A_k \bigcap \bigcap_{k\in\llbracket 1\,;n \rrbracket\backslash K} \overline{A_k}\right) = \prod_{k\in K} \mathbb{P}(A_k) \prod_{k\in\llbracket 1\,;n \rrbracket\backslash K} (1-\mathbb{P}(A_k)) > 0$$

Or, si $A = \varnothing$, alors $\mathbb{P}(A) = 0$, par contraposée, on en déduit que $\bigcap_{k\in K} A_k \bigcap \bigcap_{k\in\llbracket 1\,;n \rrbracket\backslash K} \overline{A_k}$ n'est pas vide. Ainsi, il existe $x_K \in \bigcap_{k\in K} A_k \bigcap \bigcap_{k\in\llbracket 1\,;n \rrbracket\backslash K} \overline{A_k}$. Ceci veut dire que pour tout $k \in \llbracket 1\,;n \rrbracket$, si $k \in K$, $x_K \in A_k$ et si $k \in \llbracket 1\,;n \rrbracket \backslash K$, alors $x_K \notin A_k$. Et ce, pour tout $K \subset \llbracket 1\,;n \rrbracket$.

Ainsi, on a définit une application $\varphi\colon \begin{cases} \mathscr{P}(\llbracket 1\,;n \rrbracket) \longrightarrow \Omega \\ K \longmapsto x_K \end{cases}$. Montrons que φ est injective. Soit K et K' deux éléments de $\mathscr{P}(\llbracket 1\,;n \rrbracket)$. Supposons que $\varphi(K) = \varphi(K')$ c'est-à-dire que $x_K = x_{K'}$. Soit $k \in K$, alors $x_{K'} = x_K \in A_k$ donc $k \in K'$ ceci montre que $K \subset K'$. En inversant les rôles de K et K', on obtient l' inclusion réciproque, par conséquent, $K = K'$. Ainsi, φ est injective. Dès lors, $\#\Omega \geqslant \#\mathscr{P}(\llbracket 1\,;n \rrbracket) = 2^n$.

Correction de l'exercice 7.

Correction de l'exercice 8.

Correction de l'exercice 9. Imaginons le texte écrit par le singe comme une suite infinie de caractères $x_0x_1x_2\ldots = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et la biographie de Priscille comme une suite finie de caractères $b_0b_1b_2\ldots b_{N-1}$. Pour $i \in \mathbb{N}$, notons F_i l'évènement : «le singe a tapé la biographie de Priscille partant au caractère d'indice i de son texte (et donc finiri au caractère d'indice $i+N-1$ du texte)». Alors

$$F_i = \bigcap_{k=0}^{N-1} (x_{i+k} = b_k)$$

Ainsi, par indépendance, $\mathbb{P}(F_i) = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{1}{100} = \frac{1}{100^N}$. Et donc, $\mathbb{P}(\overline{F_i}) = 1 - \frac{1}{100^N}$. Remarquons que $\overline{F_0}$, $\overline{F_N}$, $\overline{F_{2N}}, \ldots, \overline{F_{pN}}$ sont indépendants (car les caractères ne se recoupent pas). Ainsi, la probabilité que le singe n'ait pas tapé la biographie de Priscille en partant du caractère jN pour tous les $j \in \llbracket 0\,;p \rrbracket$ vaut, par indépendance

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^{p} \overline{F_{jN}}\right) = \left(1 - \frac{1}{100^N}\right)^{p+1}$$

Or, $\bigcap_{j=0}^{+\infty} \overline{F_{jN}} \subset \bigcap_{j=0}^{p} \overline{F_{jN}}$, par croissance de la probabilité,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^{+\infty} \overline{F_{jN}}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^{p} \overline{F_{jN}}\right) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(en effet, on a une suite géométrique de raison $1-\dfrac{1}{100^N}\in\,]-1\,;1\,[$) Comme les inégalités larges passent à la limite $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^{+\infty}\overline{F_{jN}}\right)\leqslant 0$. De plus, une probabilité étant positive, on en déduit que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^{+\infty}\overline{F_{jN}}\right)=0$. Par passage au complémentaire, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=0}^{+\infty}F_{jN}\right)=1$, ainsi il est presque sûr que le singe écrira la biographie (et même qu'il est presque sûr que l'on pourra trouver une version de sa biographie qui commence à un multiple de N).

Correction de l'exercice 10.

Correction de l'exercice 11.

Correction de l'exercice 12. Comme $\mathbb{N}=\bigcup_{n=0}^{+\infty}\{n\}$ et que les $\{n\}$ sont deux à deux incompatibles, $\sum\mathbb{P}(\{n\})$ converge et même $\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(\{n\})=\mathbb{P}(\mathbb{N})=1$, comme on a une série convergente, nécessairement, d'après le cours, son terme général tend vers 0, donc $\mathbb{P}(\{n\})\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. De même, par définition de la somme infinie :

$$\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(\{k\})\xrightarrow[n\to\infty]{}\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(\{k\})$$

Ainsi, $\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(\{k\})-\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(\{k\})\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, d'où $\sum_{k=n+1}^{+\infty}\mathbb{P}(\{k\})\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

Correction de l'exercice 13.

Correction de l'exercice 14.

1. Notons A_n, l'évènement «au cours des n lancers, on n'a pas obtenu deux piles à la suite».
   - Remarquons que $A_1=\Omega$, ainsi, $p_1=\mathbb{P}(A_1)=\mathbb{P}(\Omega)=1$.
   - $A_2=(\overline{P_1}\cap\overline{P_2})\cup(\overline{P_1}\cap P_2)\cup(P_1\cap\overline{P_2})$. Remarquons que $\overline{P_1}\cap\overline{P_2}$, $\overline{P_1}\cap P_2$ et $P_1\cap\overline{P_2}$ sont trois évènements deux à deux incompatibles, ainsi $\mathbb{P}(A_2)=\mathbb{P}(\overline{P_1}\cap\overline{P_2})+\mathbb{P}(\overline{P_1}\cap P_2)+\mathbb{P}(P_1\cap\overline{P_2})$, de plus par indépendance des lancers,
   $$\mathbb{P}(A_2)=\mathbb{P}(\overline{P_1})\mathbb{P}(\overline{P_2})+\mathbb{P}(\overline{P_1})\mathbb{P}(P_2)+\mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(\overline{P_2})=\frac12\times\frac12+\frac12\times\frac12+\frac12\times\frac12=\frac34$$
   - $\overline{A_3}=(P_1\cap P_2\cap\overline{P_3})\cup(\overline{P_1}\cap P_2\cap P_3)$, comme les évènements $(P_1\cap P_2\cap\overline{P_3}$ et $\overline{P_1}\cap P_2\cap P_3$ sont deux à deux incompatibles, on en déduit que
   $$\mathbb{P}(\overline{A_3})=\mathbb{P}(P_1\cap P_2\cap\overline{P_3})+\mathbb{P}(\overline{P_1}\cap P_2\cap P_3)$$
   De plus, par indépendance, on obtient
   $$\mathbb{P}(\overline{A_3})=\mathbb{P}(P_1)\mathbb{P}(P_2)\mathbb{P}(\overline{P_3})+\mathbb{P}(\overline{P_1})\mathbb{P}(P_2)\mathbb{P}(P_3)=\frac12\times\frac12\times\frac12+\frac12\times\frac12\times\frac12=\frac38$$
   D'où $\mathbb{P}(A_3)=\dfrac58$
2. Remarquons que $\Omega=P_{n+2}\cup\overline{P_{n+2}}$ et $P_{n+2}=P_{n+2}\cap\Omega=P_{n+2}\cap(P_{n+1}\cup\overline{P_{n+1}})$, par distributivité, $P_{n+2}=(P_{n+2}\cap P_{n+1})\cup(P_{n+2}\cap\overline{P_{n+1}})$, ainsi, $\Omega=(P_{n+2}\cap P_{n+1})\cup(P_{n+2}\cap\overline{P_{n+1}})\cup\overline{P_{n+2}}$. De plus,
   $$(P_{n+2}\cap P_{n+1})\cap(P_{n+2}\cap\overline{P_{n+1}})=(P_{n+2}\cap\overline{P_{n+1}})\cap\overline{P_{n+2}}=(P_{n+2}\cap P_{n+1})\cap\overline{P_{n+2}}=\varnothing$$
   Ainsi, les trois évènements proposés forment bien un système complet d'évènements.
3. D'après la question précédente on a un système complet d'évènements, ainsi d'après la formule des probabilités totales :
   $$\mathbb{P}(A_{n+2})=\mathbb{P}(A_{n+2}\cap(P_{n+1}\cap P_{n+2}))+\mathbb{P}(A_{n+2}\cap(\overline{P_{n+1}}\cap P_{n+2}))+\mathbb{P}(A_{n+2}\cap\overline{P_{n+2}})$$
   Avec :

- $A_{n+2} \cap (P_{n+1} \cap P_{n+2}) = \varnothing$, en effet, lorsque l'évènement $P_{n+1} \cap P_{n+2}$ se produit, il y a deux piles d'affilée.
- $A_{n+2} \cap (\overline{P_{n+1}} \cap P_{n+2}) = A_n \cap \overline{P_{n+1}} \cap P_{n+2}$, en effet, il faut et suffit qu'il n'y ait pas deux piles d'affilée dans les n premiers lancers si le $n+1$-ième n'a pas donné pile.
- $A_{n+2} \cap \overline{P_{n+2}} = A_{n+1} \cap \overline{P_{n+2}}$, en effet, si le $n+2$-ième lancé est face, il faut et suffit qu'il n'y ait pas deux piles d'affilée dans les $n+1$ premiers lancers.

Ainsi,

$$\mathbb{P}(A_{n+2}) = \mathbb{P}(\varnothing) + \mathbb{P}(A_n \cap (\overline{P_{n+1}} \cap P_{n+2})) + \mathbb{P}(A_{n+1} \cap \overline{P_{n+2}})$$

Remarquons que A_n et $\overline{P_{n+1}}$, P_{n+2} sont indépendants (car les $n+2$ lancers sont indépendants), de même A_{n+1} et $\overline{P_{n+2}}$ sont indépendants, donc $\mathbb{P}(A_{n+2}) = 0 + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(\overline{P_{n+1}})\mathbb{P}(P_{n+2}) + \mathbb{P}(A_{n+1})\mathbb{P}(\overline{P_{n+2}})$, donc $p_{n+2} = p_n \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} + p_{n+1} \times \dfrac{1}{2}$. Ce qui est bien la relation demandée.

4. La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants dont l'équation caractéristique est $r^2 - \dfrac{1}{2}r - \dfrac{1}{4} = 0$ dont le discriminant vaut $\dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{5}{4}$, ainsi, les solutions sont $\dfrac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Dès lors, il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = A\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Remarquons que $\sqrt{5} < \sqrt{9} = 3$, donc $0 < \dfrac{1+\sqrt{5}}{4} < 1$ et $0 > 1 - \sqrt{5} > -2$ donc $0 > \dfrac{1-\sqrt{5}}{4} > -\dfrac{1}{2}$, dès lors, $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, par somme de limites, $p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
5. On cherche à calculer $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} D_k\right)$. Or, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\bigcap_{k=1}^{+\infty} D_k \subset D_n$, par croissance de la probabilité $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} D_k\right) \leqslant \mathbb{P}(D_n) = p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Comme les inégalités larges sont conservées par passage à la limite, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} D_k\right) \leqslant 0$. Or, une probabilité est positive, il s'ensuit que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} D_k\right) = 0$. Ainsi, la probabilité de ne pas obtenir deux piles consécutifs est nulle. Par conséquent, l'évènement «on va obtenir au moins deux piles consécutifs» est presque sûr.