

Corrigé de l'Exercice 3

Devoir Surveillé 2 – BCPST 2

9 octobre 2026

Exercice 3 : Corrigé

Réalisé par IA parce que je n'avais pas le temps de le taper, je l'ai relu et je n'ai pas vu d'erreur dans la correction, c'est par ailleurs bien rédigé

1. Système quasi-complet d'événements et étude de A_0

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement A_n correspond à l'événement « Pile apparaît pour la première fois au n -ième lancer ». A_0 désigne l'événement « Pile n'apparaît jamais ».

- **Incompatibilité** : Les événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont deux à deux disjoints car le premier Pile ne peut apparaître qu'à un seul rang donné.
- **Partition de l'univers** : L'ensemble des tirages possibles Ω se décompose en la réunion disjointe des instants d'apparition du premier Pile et du cas où Pile n'apparaît jamais :

$$\Omega = A_0 \cup \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right)$$

Ainsi, la famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ constitue un **système quasi-complet d'événements** (c'est-à-dire un système incomplet dont les événements sont deux à deux disjoints et dont la réunion forme un événement de probabilité 1, car $\mathbb{P}(A_0) = 0$).

Conséquence pour $\mathbb{P}(A_0)$: Par la propriété d'additivité dénombrable (ou par passage à la limite sur les événements contraires) :

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

Pour chaque $n \geq 1$, l'événement A_n correspond à la séquence $(F, F, \dots, F, P)$ de longueur n ($n-1$ Face suivis d'un Pile). Les lancers étant mutuellement indépendants et la pièce équilibrée ($\mathbb{P}(P) = \mathbb{P}(F) = \frac{1}{2}$), on a :

$$\mathbb{P}(A_n) = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}$$

La somme de cette série géométrique vaut :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

Puisque $A_0 = \overline{\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n}$, il vient :

$$\mathbb{P}(A_0) = 1 - \mathbb{P} \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \right) = 1 - 1 = 0$$

On en déduit que **la probabilité que Pile n'apparaisse jamais est nulle** ($\mathbb{P}(A_0) = 0$).

2. Application de la formule des probabilités totales

Soit B l'événement « on obtient une boule blanche ». Puisque $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un système quasi-complet d'événements (de somme des probabilités égale à 1), la formule des probabilités totales s'écrit :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}_{A_n}(B)$$

Déterminons la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{A_n}(B)$ pour un entier $n \geq 1$ fixé :

- Sachant A_n , Pile est obtenu au n -ième lancer pour la première fois.
- Cela signifie que les $n - 1$ premiers lancers ont donné Face, ce qui a entraîné l'ajout de $n - 1$ boules noires dans l'urne.
- Au n -ième lancer, l'urne contient donc la boule blanche initiale et $n - 1$ boules noires, soit un total de $1 + (n - 1) = n$ boules.
- On effectue alors un tirage d'une boule au hasard dans cette urne. La probabilité d'obtenir la boule blanche est donc :

$$\mathbb{P}_{A_n}(B) = \frac{1}{n}$$

En injectant $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{2^n}$ et $\mathbb{P}_{A_n}(B) = \frac{1}{n}$ dans la formule des probabilités totales, on obtient :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n}$$

3. Calcul de la somme de la série

a. Expression de $F_N(x)$ sous forme intégrale

Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1[$. On considère la fonction $F_N : x \mapsto \sum_{n=1}^N \frac{x^n}{n}$. Pour tout $t \in [0, 1[$, on a par la formule de la somme d'une suite géométrique :

$$\sum_{n=1}^N t^{n-1} = \sum_{k=0}^{N-1} t^k = \frac{1 - t^N}{1 - t} = \frac{1}{1 - t} - \frac{t^N}{1 - t}$$

En intégrant cette égalité sur le segment $[0, x]$ (avec $x < 1$), par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^x \left(\sum_{n=1}^N t^{n-1} \right) dt = \int_0^x \frac{1}{1 - t} dt - \int_0^x \frac{t^N}{1 - t} dt$$

Or, de manière directe :

$$\int_0^x \left(\sum_{n=1}^N t^{n-1} \right) dt = \sum_{n=1}^N \int_0^x t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^N \left[\frac{t^n}{n} \right]_0^x = \sum_{n=1}^N \frac{x^n}{n} = F_N(x)$$

On obtient bien la relation demandée :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1[, \quad F_N(x) = \int_0^x \frac{1}{1 - t} dt - \int_0^x \frac{t^N}{1 - t} dt$$

b. Limite du reste intégral

Soit $x \in [0, 1[$ fixé. Pour tout $t \in [0, x]$, on a $0 \leq t \leq x < 1$, donc $1 - t \geq 1 - x > 0$, d'où :

$$0 \leq \frac{t^N}{1 - t} \leq \frac{t^N}{1 - x}$$

Par croissance de l'intégrale (les bornes étant ordonnées $0 \leq x$) :

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^N}{1-t} dt \leq \int_0^x \frac{t^N}{1-x} dt = \frac{1}{1-x} \left[\frac{t^{N+1}}{N+1} \right]_0^x = \frac{x^{N+1}}{(1-x)(N+1)}$$

Comme $0 \leq x < 1$, on a $\lim_{N \rightarrow +\infty} x^{N+1} = 0$, et donc par encadrement (théorème des gendarmes) :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{t^N}{1-t} dt = 0$$

c. Convergence et somme de la série

Pour tout $x \in [0, 1[$, on calcule le premier terme de la somme :

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = [-\ln(1-t)]_0^x = -\ln(1-x)$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ dans l'expression de $F_N(x)$ établie en 3.a, et en utilisant le résultat du 3.b :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} F_N(x) = -\ln(1-x) - 0 = -\ln(1-x)$$

Ceci prouve que pour tout $x \in [0, 1[$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ converge et sa somme vaut :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

d. Conclusion sur la valeur de $\mathbb{P}(B)$

En appliquant le résultat de la question 3.c avec $x = \frac{1}{2} \in [0, 1[$:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n \cdot n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1/2)^n}{n} = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)$$

La probabilité d'obtenir une boule blanche est donc égal à $\ln(2)$.