

Programme de Colle - Semaine 6

2BCPST 2

2 Novembre 2026

Année 2026 - 2027

On débutera la colle par une question de cours choisie parmi les questions listées à la fin du document

Couples de variables aléatoires

- Couple de variable (X, Y) , loi conjointe, lois marginales.
- La loi conjointe donne les loi marginales. L'inverse n'est vrai que si X et Y sont indépendantes.
- Loi conditionnelle de X sachant un évènement A .
- Etude générale de la loi d'une variable de la forme $u(X, Y)$
- Formule de transfert pour $\mathbb{E}(u(X, Y))$
- Covariance et propriétés (symétrie, bilinéarité, lien avec l'indépendance, lien avec la variance)
- Formule de König-Huygens : $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$
- Formule de polarisation : $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$
- Coefficient de corrélation linéaire : $\rho_{X,Y} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$, interprétation.

Variables aléatoires

Variables aléatoires

- Variables aléatoires, définition. Notation $X(\Omega)$ pour l'univers image.
- Évènements élémentaires : $(X = x)$ avec $x \in X(\Omega)$.
- Évènements $(X \in I)$, $(X \geq k)$ etc...
- $((X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet.
- Opérations sur les variables aléatoires : $X + Y$, XY , $f(X)$ avec f une fonction.
- Loi d'une variable aléatoire : $X(\Omega)$ et $\forall x \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = x)$.
- $\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1$.
- Si X et Y ont la même loi alors $\mathbb{P}(X \in I) = \mathbb{P}(Y \in I)$.
- Fonction de répartition F_X , propriétés.
- Indépendance des variables aléatoire, indépendance mutuelle.

Espérance, Variance

- Définition de l'espérance de X . définition variables centrées.
- Positivité, linéarité de l'espérance.
- Formule de transfert $\mathbb{E}(f(X))$.
- Si X et Y indépendantes alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$
- Variance et écart types définition et première propriétés.
- $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - E(X)^2$.
- Si X et Y indépendantes alors $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

Lois usuelles

- Loi Certaine : $X = a$, $\mathbb{E}(a) = a$ et $\mathbb{V}(a) = 0$
- Loi Uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$: $X \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$, $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$
- Loi de Bernoulli : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, $\mathbb{E}(X) = p$ et $\mathbb{V}(X) = p(1-p)$.
- Loi Binômiale : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$.
- La loi binômiale est celle d'une variable aléatoire qui compte le nombre de succès de n expériences de Bernoulli.
- Loi Géométrique : $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$, $\mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}$, $\mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n$, absence de mémoire.
- Loi de Poisson : $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, $\mathbb{E}(X) = \lambda$, $\mathbb{V}(X) = \lambda$, stabilité.

Questions de Cours

- 112. Si X est une variable aléatoire admettant une espérance et une variance, et si a et b sont deux réels, rappeler l'espérance et la variance de la variable aléatoire $aX + b$.
- 113. Définition de l'espérance d'une variable aléatoire X discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.
- 114. Formule de König-Huygens sur les variables aléatoires.
- 115. Donner la définition de la variable aléatoire centrée réduite associée à une variable aléatoire X .
- 116. Énoncer le théorème de transfert dans le cadre d'une variable aléatoire réelle discrète.
- 118. Énoncer la définition de l'indépendance de deux variables aléatoires réelles discrètes.
- 119. Énoncer le lemme des coalitions.
- 124. Expliciter la loi puis donner l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.
- 125. Espérance et variance d'une variable aléatoire de loi géométrique.
- 126. Donner la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$ si X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
- 127. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Expliciter la loi de X et donner son espérance et sa variance.
- 128. Donner la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$ si X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
- 138. Rappeler les résultats connus sur la loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson
- 139. Énoncer l'inégalité de Markov.
- 140. Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Meme de la semaine :

PYTHON LIST METHODS

 `.append()` 

 `.clear()`

 `.copy()` 

 `.count()` 2

 `.index()` 2

 `.insert(1,)` 

 `.pop(2)` 

 `.remove()` 

 `.reverse()` 