Chapitre 3

Variables aléatoires réelles discrètes

Table des matières

Dans tout ce chapitre, on fixe un univers Ω, $\mathscr{T}$ une tribu sur Ω et $\mathbb{P}$ une probabilité définie sur $\mathscr{T}$. On rappelle qu'un ensemble E est fini s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $E = \{x_k \mid k \in [\![1 ; n]\!]\}$ avec les x_k deux à deux distincts, n est alors le nombre d'éléments de E : $n = \#E = \mathrm{Card} E$. Un ensemble E est dit dénombrable si $E = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ avec les x_k deux à deux distincts. Si E est fini ou dénombrable, on dit que E est au plus dénombrable. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire.

1 Loi d'une variable aléatoire

Exemples 1. 1. On lance deux dés à quatre faces et on note X_1 : somme des résultats obtenus.

2. On lance une infinité de fois une pièce équilibrée et on note X_2 la première fois où on a obtenu pile.

Définition définition de l'univers image

L'ensemble $X(\Omega) = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$ est appelé **univers image**.

Exemples 2. Déterminer l'univers image des VA de l'exemple 1 puis déterminer les évènements $(X_1 = 7)$ et $(X_2 = 3)$.

On dit que X est finie (resp. infinie) si $X(\Omega)$ est fini (resp. infini). On dit que $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est variable aléatoire discrète si $X(\Omega)$ est au plus dénombrable. À partir de maintenant $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable réelle discrète finie ou infinie.

Proposition n° 1 : système complet d'événements associé à une variable aléatoire finie

Si X est finie avec $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in [\![1 ; n]\!]\}$, alors $(X = x_1), \dots, (X = x_n)$ forment un SCE appelé **SCE des valeurs possibles** de X. En particulier, $\sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i) = 1$. Pour B un évènement, $\mathbb{P}(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap (X = x_i))$

Proposition n° 2 : système complet d'événements associé à une variable aléatoire infinie

Si X est infinie avec $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$, alors les évènements $(X = x_k)$, pour $k \in \mathbb{N}$, forment un SCE appelé **SCE des valeurs possibles** de X. En particulier, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x_n) = 1$. Pour $B \in \mathscr{T}$, $\mathbb{P}(B) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap (X = x_i))$

Définition de la loi de probabilité

Soit X une variable aléatoire réelle discrète. La **loi** de X est la fonction qui, à $x \in X(\Omega)$, associe $\mathbb{P}(X = x)$.

Remarque 1. Trouver la loi de probabilité de X revient à déterminer $X(\Omega)$ puis la valeur de $\mathbb{P}(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

Exemples 3. Déterminer la loi de probabilité de X_1 et X_2 de l'exemple 1.

Remarque 2. Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de réels deux à deux distincts et $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs tels que $\sum p_n$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$. Alors, il existe une variable aléatoire réelle et discrète X telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = x_n) = p_n$.

Exemple 4. Ainsi, il existe une variable aléatoire X définie sur Ω tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{1}{2^n}$ sans avoir à définir X ou Ω. D'ailleurs, souvent, cela ne nous importera peu.

Définition de deux variables aléatoires de même loi

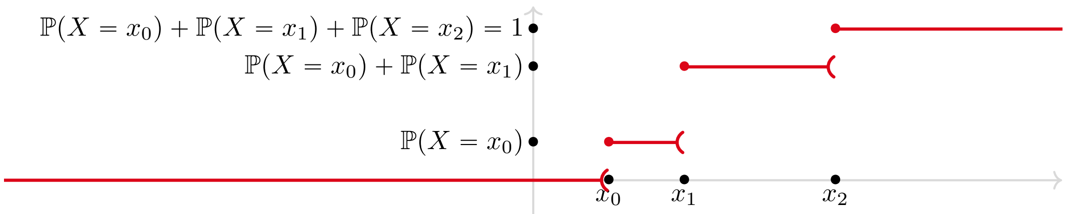
Si $X(\Omega) = Y(\Omega)$ et que pour tout $x \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(Y = x)$, alors on dit que X et Y ont la **même loi**.

Exemple 5. Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = 1/2$ (on dit que X est une VA de Rademacher), quelle est la loi de $Y = -X$?

Attention : avoir la même loi ne veut pas dire être égales
Si X et Y ont même loi, cela ne signifie pas que $X = Y$

Exemple 6. Considérons un dé à 6 faces : une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et trois faces portent le numéro 3, on lance le dé et on note X le nombre obtenu, déterminer la fonction de répartition de X.

Proposition n° 3 : lien entre fonction de répartition et loi de X
Si $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in I\}$ avec $I = [\![0 ; n]\!]$ ou $I = \mathbb{N}$ et les x_n rangés par ordre strictement croissant. Soit $n \in I$ et $x \in [\, x_n ; x_{n+1} \,[$, $F_X(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = x_k)$ et $\mathbb{P}(X = x_n) = F_X(x_n) - F_X(x_{n-1})$ (sauf pour $n = 0$).



Fonction de répartition d'une variable aléatoire prenant trois valeurs. La fonction de répartition présente trois discontinuités, au point x_i la hauteur de la discontinuité vaut $\mathbb{P}(X = x_i)$.

2 Indépendance de variables aléatoires

Proposition n° 4 : caractérisation de l'indépendance de variables aléatoires discrètes

- Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes ssi pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on a $\mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y)$
- $X_0, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes si et seulement si :

$$\forall\, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_0(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega) \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=0}^{n} (X_i = x_i) \right) = \prod_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

- Les variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont indépendantes si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \forall\, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_0(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega) \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=0}^{n} (X_i = x_i) \right) = \prod_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

Remarque 3. L'indépendance de n variables aléatoires sert à modéliser la répétition d'expériences où les résultats précédents n'ont pas de conséquences sur les expériences à venir. Par exemple, si X_k représente la valeur du dé lors du k-ième lancer, alors il paraît raisonnable de supposer que X_1, $X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes.

Remarque 4. Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et $i \neq j$ alors X_i et X_j sont indépendantes (indépendance deux à deux). Plus généralement si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors toute sous-famille est indépendante.

Péril imminent la réciproque est fausse
Si X, Y et Z sont telles que X et Y sont indépendantes, X et Z aussi et Y et Z également, cela n'implique pas que X, Y et Z sont indépendantes. De même, avec plus de trois variables aléatoires.

Exemple 7. Soit X tel que $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = \dfrac{1}{2}$, Y indépendante de X de même loi, on pose $Z = XY$, alors X et Y sont indépendantes, X et Z sont indépendantes, et Y et Z sont indépendantes. Cependant, X, Y et Z ne sont pas indépendantes.

Exemple fondamental : somme de n variables aléatoires de Bernoulli

Soit $X_1, \dots, X_n$ n VA indépendantes, de même loi : $X_i \sim \mathscr{B}(p)$, alors $X = X_1 + \dots + X_n \sim \mathscr{B}(n, p)$.

Théorème n° 1 : lemme des coalitions *(admis)*

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ une famille de variables aléatoires indépendantes., soit $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ et $g\colon \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}$, alors les variables aléatoires $f(X_1, X_2, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, X_{m+2}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Remarque 5. On peut faire plus de deux coalitions : les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_4)$, $g(X_5, \dots, X_8)$, $h(X_9, X_{10})$, ..., $m(X_{20}, \dots, X_{25})$ sont indépendantes. De même, $u_1(X_1)$, $u_2(X_2), \dots, u_n(X_n)$ sont indépendantes.

3 Espérance et Variance

3.1 Espérance

Définition de l'espérance d'une variable aléatoire

- Si X est une variable aléatoire fini, alors $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in [\![1\,; n]\!]\}$ On appelle **espérance** de X : $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x) = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \mathbb{P}(X = x_k)$
- Si X est une variable aléatoire discrète infini, alors $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Si la série $\sum x_k \mathbb{P}(X = x_k)$ converge absolument, alors on appelle **espérance** de X : $\mathbb{E}(X) = \sum\limits_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} x_k \mathbb{P}(X = x_k)$

Remarques 6.
- On dit que X est **centrée** si X admet une espérance et si $\mathbb{E}(X) = 0$.
- $\mathbb{E}(X)$ est une moyenne pondérée (par les probabilités) des valeurs prises par X.
- $\mathbb{E}(X)$ ne dépend que de la loi de X, si X et X' ont la même loi, alors $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X')$.
- Dans le cas, où X est infinie, d'après un résultat admis au chapitre séries, la convergence absolue permet que la somme infinie ne dépendent pas du choix de la numérotation des éléments de $X(\Omega)$.
- On dit que X admet un moment d'ordre k si X^k admet une espérance.

Exemples 8.
- On note lance un dé une infinité de fois et on note X le rang du premier 4. Déterminer si X admet une espérance et calculer-là le cas échéant.
- Justifier qu'il existe Y une variable aléatoire telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y = k) = \dfrac{\pi^2}{6n^2}$, Y admet-elle une espérance ?

Proposition n° 5 : propriétés de l'espérance

Soient X et Y deux variables aléatoires admettant des espérances et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors :

1. Linéarité de l'espérance : $\lambda X + Y$ admet une espérance et $\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
2. Espérance d'une variable aléatoire constante : $\mathbb{E}(\lambda) = \lambda$
3. Positivité de l'espérance : si $X \geqslant 0$ (pour tout $\omega \in \Omega, X(\omega) \geqslant 0$), alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$
4. Croissance de l'espérance : si $X \leqslant Y$ $(\forall \omega \in \Omega, X(\omega) \leqslant Y(\omega))$ alors, $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$

Exemple 9. Si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, alors $$\mathbb{E}(X) = np$$

Théorème n° 2 formule de transfert *(admis)*

Soient X une VA infinie, avec $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ (avec les x_k deux à deux distincts) et $\phi\colon X(\Omega) \to \mathbb{R}$. Alors $\phi(X)$ admet une espérance ssi $\sum \phi(x_n)\mathbb{P}(X = x_n)$ converge absolument et alors :

$$\mathbb{E}(\phi(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \phi(x)\mathbb{P}(X = x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \phi(x_n)\mathbb{P}(X = x_n)$$

Remarque 7. Ce théorème permet de calculer $\mathbb{E}(f(X))$ sans connaître la loi de $f(X)$ seulement celle de X.

Exemples 10.
1. Si $X \sim \mathscr{U}([\![1\,;n]\!])$ calculer $\mathbb{E}(X^2)$
2. Si $X \sim \mathscr{U}([\![1\,;n]\!])$ calculer $\mathbb{E}(3^X)$
3. Si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, calculer $\mathbb{E}(X^2)$
4. Si X suit la loi trouvé à l'exemple 8, calculer $\mathbb{E}(X^2)$

Proposition n° 6 : inégalité de Markov

Soient $a > 0$ et X une variable aléatoire **positive** admettant une espérance. Alors $$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

Exemple 11. Si dans une classe, la moyenne au DS est 6, alors que peut-on dire de la probabilité d'avoir une note supérieure ou égale à 18 ?

Proposition n° 7 : espérance du produit de variables aléatoires indépendantes *(admise)*

- Si X et Y deux VA indépendantes admettent des espérances, alors XY aussi et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$
- Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes admettent des espérances, alors $\prod_{i=1}^{n} X_i$ aussi et $\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$

Péril imminent : la réciproque est fausse

Si $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, ça ne prouve pas forcément que X et Y sont indépendantes.

Exemple 12. $X \sim \mathscr{U}([\![-1\,;1]\!])$ et $Y = 1 - X^2$

3.2 Variance

Définition de la variance et de l'écart-type

- Soit X une variable aléatoire réelle finie, on appelle **variance** de X : $$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$$
  On appelle **écart-type** de X le réel : $$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$
- Soit X une variable aléatoire réelle discrète infinie, si X et $(X - \mathbb{E}(X))^2$ admettent chacune une espérance, on appelle **variance** de X le réel positif $$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$$
  On appelle **écart-type** de X le réel positif $$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$$

Remarques 8.
- La variance mesure la moyenne des carrés des écarts de X par rapport à $\mathbb{E}(X)$.
- Par la formule de transfert, si la série $\sum_{x\in X(\Omega)} (x-\mathbb{E}(X))^2\mathbb{P}(X=x)$ converge, $\mathbb{V}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} (x-\mathbb{E}(X))^2\mathbb{P}(X=x)$.
- La variance ne dépend que de la loi de X : si X et X' ont même loi $\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(X')$.
- Si X admet une espérance et une variance avec $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{V}(X) = 1$, on dit que X est **centrée réduite**.

Proposition n° 8 : propriétés de la variance

Soient X, Y deux variables aléatoires telles que X admet une variance et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, alors :

1. $\mathbb{V}(X) \geqslant 0$
2. $aX+b$ a une variance et $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)$ (la variance est quadratique)
3. Y a une variance ssi Y a un moment d'ordre 2, alors $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2$ (formule de König-Huygens)
4. Si $\mathbb{V}(X) > 0$, alors $X^* = \frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite, X^* est appelée variable **centrée réduite** associée à X.

Exemples de variances des lois usuelles à connaître :

1. Si $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1\,;n\rrbracket)$, alors $\mathbb{V}(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$
2. Si $X \sim \mathscr{B}(p)$, alors $\mathbb{V}(X) = p(1-p)$
3. Si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, alors $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$

Théorème n° 3 : inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soient X une variable aléatoire admettant une variance et $a > 0$, alors $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)| \geqslant a) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(X)}{a^2}$

Exemple 13. Supposons qu'on ait dé dont la probabilité d'obtention un six est notée p. Pour approximer p, on lance ce dé n fois et on note F la fréquence du six. Pour quelle valeur de n la probabilité pour que F soit une approximation de p à 0.01 près est-elle supérieure à 0.9 ?

Remarque 9. Sur l'exemple 13, on a implicitement montré que la probabilité d'un évènement est la limite de la fréquence de cet évènement lorsque l'on répète l'expérience un «grand» nombre de fois. Cela est conforme à l'intuition : dire qu'un dé est équilibré indique que, si on le lance un très grand nombre de fois, alors la fréquence d'une face doit être proche 1/6. Cela permet de relier la probabilité d'un évènement (définie comme l'image de cette évènement par une certaine fonction $\mathbb{P}$ vérifiant certaines propriétés) à cette notion intuitive. Or, depuis le début de ce cours, on avait soigneusement évité de faire un tel rapprochement.

4 Lois usuelles

4.1 Rappels sur les lois de première année

Définition de la loi uniforme (modélise le tirage au hasard de façon équitable)

On dit que X suit une loi **uniforme** sur un ensemble fini E si, pour tout $e \in E$, $\mathbb{P}(X=e) = \dfrac{1}{\operatorname{Card} E}$. On note $X \sim \mathscr{U}(E)$.

Exemple 14. Si $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1\,;n\rrbracket)$, alors pour tout $k \in \llbracket 1\,;n\rrbracket$, $\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{1}{n}$

Définition de la loi de Bernoulli (modélise une expérience à 2 issues)

On dit que X suit la loi de **Bernoulli** de paramètre $p \in [\,0\,;1\,]$ si $\begin{cases}\mathbb{P}(X=1) &= & p\\ \mathbb{P}(X=0) &= & 1-p\end{cases}$. On note $X \sim \mathscr{B}(p)$.

Définition d'une loi binomiale (compte les succès dans n VA de Bernoulli indépendantes)

On dit que X suit une loi **binomiale** de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\,0\,;1\,]$ si, pour tout $k \in [\![\,0\,;n\,]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. On note $X \sim \mathscr{B}(n, p)$.

Remarque 10. Si une variable X compte le nombre de succès de n VA de Bernoulli indépendantes et de paramètre p, alors $X \sim \mathscr{B}(n, p)$ où p est la probabilité de succès à chaque expérience.

Exemple 15. Soit une urne qui contient 10 billes blanches, 3 rouges et 12 noires. On tire au hasard, successivement et avec remise, 7 boules. On note X la VA qui compte le nombre de boules rouges obtenues. Quelle est la loi de X ?

4.2 Loi géométrique

Définition d'une loi géométrique

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi **géométrique** de paramètre $p \in \,]\,0\,;1\,[$, si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = (1-p)^{n-1}p$. On note alors $X \sim \mathscr{G}(p)$.

Proposition n° 9 : interprétation d'une loi géométrique

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables de Bernoulli de paramètre p indépendantes. On note T le rang du premier succès : $T = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid X_n = 1\}$, alors T est bien définie presque sûrement et $T \sim \mathscr{G}(p)$.

Remarque 11. Ainsi, une variable aléatoire géométrique de paramètre p renvoie le rang du premier succès dans une suite d'expériences identiques et indépendantes ayant une probabilité de succès valant p.

Proposition n° 10 : propriétés d'une loi géométrique

Soit $X \sim \mathscr{G}(p)$ avec $p \in \,]\,0\,;1\,[$, alors :

1. X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = \dfrac{1}{p}$
2. X admet une variance et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$
3. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X > k) = (1-p)^k$
4. $\forall (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2, \mathbb{P}(X > n+m | X > n) = \mathbb{P}(X > m)$

Remarque 12. La dernière propriété affirme qu'une loi géométrique est sans mémoire.

4.3 Loi de Poisson

Définition d'une loi de Poisson

On dit que X suit une loi de **Poisson** de paramètre $\lambda \geqslant 0$, si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = \mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$. On note $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$.

Proposition n° 11 : espérance et variance d'une loi de Poisson

Si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, alors X admet une espérance et une variance et $\mathbb{E}(X) = \mathbb{V}(X) = \lambda$.

loic.devilliers@proton.me

5 Tableau récapitulatif des lois usuelles

Les caractéristiques de ce tableau doivent être absolument connues par cœur pour ces variables aléatoires. Les quatre premières sont des variables aléatoires réelles discrètes finies, les deux suivantes sont des variables aléatoires discrètes infinies. Enfin, les quatre dernières sont des variables à densité et seront vu dans un prochain chapitre.

Nom de la loi	Paramètre	Univers image	Loi de probabilité	Espérance	Variance	Interprétation
Constante	$a \in \mathbb{R}$	$\{a\}$	$\mathbb{P}(X = a) = 1$	a	0	Constante
Bernoulli	$p \in [\,0\,;1\,]$	$\{0, 1\}$	$\mathbb{P}(X = 1) = p$ $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$	p	$p(1-p)$	Succès vs échec
Binomiale	$(n, p) \in \mathbb{N}^* \times [\,0\,;1\,]$	$[\![\,0\,;n\,]\!]$	$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ pour $k \in [\![\,0\,;n\,]\!]$	np	$np(1-p)$	Nombre de succès dans n Va de Bernoulli de paramètre p indépendantes
Uniforme	n	$[\![\,1\,;n\,]\!]$	$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$ pour $k \in [\![\,1\,;n\,]\!]$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$	Tirage équitable
Géométrique	$p \in \,]\,0\,;1\,[$	$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	Donne le premier succès dans une suite de Va indépendantes de Bernoulli de paramètre p
Poisson	$\lambda \geqslant 0$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}$ pour $k \in \mathbb{N}$	λ	λ	Désintégration radioactive, arrivé dans une file d'attente, évènements rares etc.

Nom de la loi	Paramètre	Univers image	Densité	Fonction de répartition	Espérance	Variance
Uniforme	$a < b$	$]\,a\,;b\,[$	$t \mapsto \frac{\mathbb{1}_{]\,a\,;\,b\,[}(t)}{b-a}$	$x \mapsto \frac{x-a}{b-a} \mathbb{1}_{[\,a\,;\,b\,]}(x) + \mathbb{1}_{]\,b\,;\,+\infty\,[}(x)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle	$\lambda > 0$	$\mathbb{R}_+$	$t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$	$x \mapsto (1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
Normale centrée réduite		$\mathbb{R}$	$t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$	$\Phi \colon x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \,\mathrm{d}t$	0	1
Normale	$\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$	$\mathbb{R}$	$t \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \,\mathrm{d}t$	μ	σ^2