Programme de Colle - Semaine 7

2BCPST 2 7 Novembre 2026 Année 2026 - 2027

On débutera la colle par une question de cours choisie parmi les questions listées à la fin du document

Couples de variables aléatoires

- Couple de variable (X, Y), loi conjointe, lois marginales.
- La loi conjointe donne les loi marginales. L'inverse n'est vrai que si X et Y sont indépendantes.
- Loi conditionnelle de X sachant un évènement A.
- Etude générale de la loi d'une variable de la forme $u(X, Y)$
- Formule de transfert pour $\mathbb{E}(u(X, Y))$
- Covariance et propriétés (symétrie, bilinéarité, lien avec l'indépendance, lien avec la variance)
- Formule de König-Huygens : $\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$
- Formule de polarisation : $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$
- Coefficient de corrélation linéaire : $\rho_{X,Y} = \dfrac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$, interprétation.

Nombres complexes

- Forme algébrique, conjugué, module. Opérations.
- Interprétation graphique des nombre complexes, notion d'affixe.
- Inégalité triangulaire $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, cas d'égalité
- Forme trigonométrique. Argument.
- Résoudre $a\cos x + b\sin x = c$ d'inconnue x.
- Forme exponentielle, propriétés (produit, quotient, puissance, module)
- Exponentielle complexe : $e^{a+ib} = e^a e^{ib}$, propriétés.
- Formules d'Euler
- Linéarisation de $\cos^p(x)\sin^q(x)$
- Technique de l'angle moitié
- Résolution dans $\mathbb{C}$ d'équations de degré 2 : $ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Questions de Cours

1. Définition d'une application $f : E \to F$ injective.
2. Définition d'une application $f : E \to F$ surjective.
3. Définir la notion d'application bijective et de bijection réciproque.
4. Pour une application $f : E \to F$ bijective de E vers F, définition de la fonction réciproque f^{-1}.
5. Définition des parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe.
6. Définition du module d'un nombre complexe.
7. Définir le degré d'un polynôme à coefficients réels ou complexes.
8. Qu'appelle-t-on *racine* d'un polynôme ? Qu'appelle-t-on *ordre de multiplicité* d'une racine d'un polynôme ?
9. Somme et produit des racines d'une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $a \neq 0$.
10. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, que vaut la dérivée k-ème du polynôme X^n ?
11. Théorème de D'Alembert-Gauss (Tout polynôme non constant admet au moins une racine complexe)

117. Comment déterminer les lois marginales d'un couple (X, Y) de variables aléatoires réelles discrètes si on connaît la loi conjointe ?

120. Lien(s) entre l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes et leur covariance.

121. Variance de la différence de deux variables aléatoires. Cas particulier où les deux variables sont indépendantes.

122. Formule de l'espérance de $Z = u(X, Y)$ où X et Y sont des variables aléatoires discrètes à valeurs dans $[\![1, n]\!]$ et u une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Meme de la semaine :

