Chapitre 2

Espaces probabilisés et variables aléatoires

En première année, vous avez étudié les espaces probabilisés finis : l'univers était un ensemble fini et les variables aléatoires ne pouvaient donc prendre qu'un nombre fini de valeurs, ceci convient si on a trois dés à six faces ou si on veut lancer n fois une pièce. Mais cela est insuffisant, car pour l'instant, on ne peut pas définir ce que veut dire tirer un nombre au hasard et uniformément dans $[\,0\,;1\,]$ ou bien lancer une infinité de fois une pièce.

Table des matières

1 Espaces probabilisés **2**

1.1 Tribu 2

1.2 Probabilité 3

1.3 Probabilité conditionnelle et formules importantes de probabilités 3

1.4 Indépendance d'évènements 5

2 Variables aléatoires réelles **5**

1 Espaces probabilisés

1.1 Tribu

Définition de l'union et de l'intersection d'un nombre dénombrable d'ensembles

Soit E un ensemble. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n est une partie de E. Alors on définit l'**intersection** et l'**union** de tous les A_n par :

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n = \{x \in E \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x \in A_n\} \quad \text{et} \quad \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \{x \in E \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad x \in A_n\}$$

Exemples 1. Déterminer $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} \left] 0\,;\frac{1}{n+1} \right]$ et $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} [\,0\,;n\,]$.

En première année, vous avez travaillé avec un univers fini Ω et un événement était une partie quelconque de Ω. Lorsque Ω est un ensemble infini, pour des raisons techniques, seulement certaines parties de Ω pourront être considérées comme des évènements. La notion de tribu va permettre de donner un cadre formel à cette idée.

Définition d'une tribu (ou d'une σ-algèbre)

Soient Ω un ensemble et $\mathscr{T} \subset \mathscr{P}(\Omega)$. On dit que $\mathscr{T}$ est une **tribu** (ou une σ-algèbre) sur Ω si :

1. $\Omega \in \mathscr{T}$
2. Pour tout $A \in \mathscr{T}$, $\overline{A} \in \mathscr{T}$
3. $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{T}^{\mathbb{N}}$, $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{T}$

Si $A \in \mathscr{T}$, on dit que A est un **évènement**.

Exemples 2. $\mathscr{T}_1 = \mathscr{P}(\Omega)$ est une tribu, pour $A \subset \Omega$, $\mathscr{T}_2 = \{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\}$ est une tribu.

Proposition n° 1 : propriétés d'une tribu

Soit $\mathscr{T}$ une tribu sur Ω, alors :

1. $\varnothing \in \mathscr{T}$
2. $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{T}^{\mathbb{N}}$, $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{T}$
3. $\forall\,(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in \mathscr{T}^n$, $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{T}$ et $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{T}$
4. Si $(A, B) \in \mathscr{T}^2$, alors $A \backslash B \in \mathscr{T}$

Démonstration de la proposition n° 1 :

1. Comme $\Omega \in \mathscr{T}$, $\varnothing = \overline{\Omega} \in \mathscr{T}$
2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{T}^{\mathbb{N}}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{A_n} \in \mathscr{T}$, donc $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n} \in \mathscr{T}$. Or, $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n} = \overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n}$. On en déduit que $\displaystyle\overline{\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n} \in \mathscr{T}$, ainsi, par passage au complémentaire, $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathscr{T}$.
3. Soit $(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in \mathscr{T}^{\mathbb{N}}$. On pose $B_0 = \varnothing \in \mathscr{T}$, pour tout $k \in [\![\,1\,;n\,]\!]$, $B_k = A_k \in \mathscr{T}$ et pour tout $k > n$, $B_k = \varnothing \in \mathscr{T}$, alors d'après la définition d'une tribu, $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k \in \mathscr{T}$. Ainsi, $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k \in \mathscr{T}$. On pose $C_0 = \Omega \in \mathscr{T}$, pour tout $k \in [\![\,1\,;n\,]\!]$, $B_k = A_k \in \mathscr{T}$ et pour tout $k > n$, $B_k = \Omega \in \mathscr{T}$, alors d'après le point 2, $\displaystyle\bigcap_{k=0}^{+\infty} C_k \in \mathscr{T}$. Ainsi, $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} A_k = \bigcap_{k=0}^{+\infty} C_k \in \mathscr{T}$.
4. Soit $A \in \mathscr{T}$ et $B \in \mathscr{T}$, alors $A \backslash B = A \cap \overline{B}$, comme $B \in \mathscr{T}$, $\overline{B} \in \mathscr{T}$, en utilisant le point 2, $A \cap \overline{B} \in \mathscr{T}$, ainsi $A \backslash B \in \mathscr{T}$. ■

Exemple 3. On effectue une suite infinie de lancers de pièces.

1. Définir quel ensemble Ω modélise cette ensemble.
2. On définit, pour $p \in \mathbb{N}$. l'évènement, F_n «on obtient face au p-ième lancer». Donner une définition ensembliste de F_p.
3. Écrire à l'aide des F_p les évènements suivants :
   - A : «on a obtenu au moins une face lors des deux premiers lancers»
   - B : «on a obtenu que des faces lors de tous les lancers»
   - C : «on a obtenu au moins une face»
   - D : «à partir d'un certain rang, on a obtenu que des faces»

1.2 Probabilité

Définition d'une probabilité

Soit Ω un ensemble et $\mathscr{T}$ une tribu, on dit que $\mathbb{P}\colon \mathscr{T} \to [\,0\,;1\,]$ est une **probabilité** sur Ω muni de la tribu $\mathscr{T}$ si :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. Pour tout $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{T}^{\mathbb{N}}$ avec les B_n deux à deux incompatibles, $\sum \mathbb{P}(B_n)$ converge et $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n)$

À partir de maintenant, Ω désignera toujours un univers et $\mathbb{P}$ une probabilité définie sur $\mathscr{T}$ une tribu de Ω.

Proposition n° 2 : propriétés des probabilités

Soit A, B, A_1, ..., A_n des évènements.

1. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$
2. Si $A_1, \ldots, A_n$ sont 2 à 2 incompatibles, alors $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$
3. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
4. $\mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$
5. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
6. Si $B \subset A$ alors $\mathbb{P}(A\backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(B) \leqslant \mathbb{P}(A)$

Démonstration de la proposition n° 2 :

1. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \varnothing$, les B_n sont deux à deux disjoints, ainsi, la série $\sum \mathbb{P}(B_n)$ converge, donc nécessairement, $\mathbb{P}(B_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, de plus, $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(\varnothing) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}(\varnothing)$, par unicité de la limite, $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$.
2. Fixons, A_1, ..., A_n des évènements deux à deux incompatibles. Posons, $B_0 = \varnothing$, pour tout $k \in [\![\, 1\,; n\,]\!]$, $B_k = A_k$ et pour tout $k > n$, $B_k = \varnothing$, alors les B_k sont deux à deux incompatibles, dès lors, $\sum \mathbb{P}(B_k)$ converge et $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_k)$. Or, $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_k) = 0 + \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) + 0$ et $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=0}^{+\infty} B_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k\right)$, On peut en conclure que $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$
3. Remarquons que $\Omega = A \cup \overline{A}$ et que A et $\overline{A}$ sont incompatibles, ainsi d'après le point précédent, $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A})$ donc $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
4. Remarquons que $A = (A \cap B) \cup (A\backslash B)$, or $A \cap B$ et $A\backslash B$ sont incompatibles, ainsi,
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A\backslash B)) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A\backslash B)$$
Ainsi, $\mathbb{P}(A\backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
5. $A \cup B = B \cup (A\backslash B)$, remarquons que B et $A\backslash B$ sont incompatibles, ainsi, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A\backslash B)$, en utilisant le point précédent, on obtient $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
6. Si $B \subset A$, $A \cup B = B$ ainsi, $\mathbb{P}(A\backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$. Comme $\mathbb{P}(A\backslash B) \geqslant 0$, donc $\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) \geqslant 0$, ainsi, $\mathbb{P}(B) \leqslant \mathbb{P}(A)$. ■

Définition d'un évènement négligeable, d'un évènement presque sûr

Soit $A \in \mathscr{T}$, on dit que A est un évènement **négligeable** si $\mathbb{P}(A) = 0$, on dit que A est **presque sûr** si $\mathbb{P}(A) = 1$.

Remarque 1. Un évènement négligeable n'est pas forcément l'évènement impossible, de même, un évènement presque sûr n'est pas forcément l'évènement certain Ω.

Exemple 4. En reprenant le cadre de l'exemple 3, déterminer la probabilité de l'évènement «on a obtenu que des faces» puis celle de l'évènement «on a obtenu au moins une face».

1.3 Probabilité conditionnelle et formules importantes de probabilités

Définition d'une probabilité conditionnelle

Soit B un évènement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$, pour A un évènement, on définit la **probabilité conditionnelle** de A sachant B par $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

Exemple 5. On lance un dé à six faces équilibré, quelle est la probabilité de tirer un nombre pair sachant que l'on a tiré un nombre premier ?

Proposition n° 3 : la probabilité conditionnelle est une probabilité

Si $\mathbb{P}(B) > 0$, alors $\mathbb{P}_B$ est une probabilité.

Remarque 2. Si $\mathbb{P}(B) > 0$, alors on a toujours $\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A \cap B)$.
Si $\mathbb{P}(B) = 0$, on pose, par convention, $\mathbb{P}(A|B) = 0$, ainsi la relation $\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A \cap B)$ reste vraie.

Définition d'un système (quasi) complet d'évènements

On dit qu'une suite d'évènements $(A_n)_n$ est un **système complet d'évènements** si les A_n sont deux à deux incompatibles et si $\Omega = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$.
On dit que $(A_n)_n$ est un **système quasi complet d'évènements** si les A_n sont deux à deux incompatibles et si $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1$.

Théorème n° 1 : formule des probabilités totales

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système (quasi) complet d'évènements. Pour tout $B \in \mathscr{T}$, la série $\sum \mathbb{P}(B \cap A_i)$ converge et

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$$

Remarque 3. La formule des probabilités totales est souvent utile lorsque pour qu'un évènement B soit réalisé, il existe plusieurs cas qui peuvent amener à cet évènement.

Exemple 6. On tire deux boules successivement et sans remise d'une urne contenant x boules rouges et y boules bleues avec $x \geqslant 1$ et $y \geqslant 1$. Quelle est la probabilité que la deuxième boule soit bleue ?

Théorème n° 2 : formules des probabilités composées

Soit une famille d'évènements $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ alors :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}(A_1)\prod_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}\left(A_{k+1}\middle|\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1\cap A_2}(A_3)\mathbb{P}_{A_1\cap A_2\cap A_3}(A_4)\dots\mathbb{P}_{A_1\cap A_2\cap\dots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

Remarque 4. La formule des probabilités composées est particulièrement utile lorsqu'il y a une succession d'expériences et que le résultat d'une expérience est susceptible de dépendre des expériences précédentes et que l'on cherche la probabilité que chaque expérience ait eu une issue donnée.

Exemple 7. On tire successivement et sans remise trois billes d'une urne contenant $x \geqslant 2$ billes rouges et $y \geqslant 1$ bleues. Quelle est la probabilité que les deux premières soient rouges mais pas la dernière ?

Théorème n° 3 : formule de Bayes

Soit B un évènement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$, alors $$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Remarque 5. La formule de Bayes exprime une probabilité conditionnelle avec la probabilité conditionnelle «inverse».

Exemple 8. Considérons une maladie telle que la probabilité qu'une personne soit atteinte soit de 1/1000 et que l'on ait un test pour savoir si un patient est infecté :

- Si le patient est malade, le résultat sera positif avec une probabilité de 99/100.
- Si un patient est sain, le résultat sera négatif avec une probabilité de 95/100 .

Supposons que le test d'un patient soit positif, quelle est la probabilité qu'il soit vraiment malade ?

1.4 Indépendance d'évènements

Définition de l'indépendance de deux évènements

On dit que deux évènements A et B sont **indépendants** si $$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Remarque 6. Lorsque $\mathbb{P}(B) > 0$, alors A et B sont indépendants ssi $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$. Ainsi, la probabilité d'obtenir A est la même si on sait que B est réalisé.

Définition de l'indépendance mutuelle de n évènements

On dit que les évènements $(A_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ sont **indépendants** si, pour tout $J \subset [\![1\,;n]\!]$, $$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j)$$

Définition de l'indépendance mutuelle d'une suite d'évènements

On dit que les évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **indépendants** si, pour toute partie finie J de $\mathbb{N}$, $$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j)$$

2 Variables aléatoires réelles

Définition d'une variable aléatoire réelle

On dit que $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une **variable aléatoire** si pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant a\} \in \mathscr{T}$.

On note $(X \leqslant a) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant a\}$. On définit, de même, $(X > a) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > a\}$, $(X < a)$ et $(X \geqslant a)$, ainsi que $(X \in I) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\}$

Proposition n° 4 *(admis)*

Soit X une variable aléatoire et I un intervalle de $\mathbb{R}$, alors $(X \in I)$ est un évènement.

Définition de la fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire, alors $F_X : t \mapsto \mathbb{P}(X \leqslant t)$ est appelée **fonction de répartition** de X.

Proposition n° 5 : propriétés de la fonction de répartition

Si X est une variable aléatoire, alors F_X est croissante, $F_X(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1$ et $F_X(t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0$.

Démonstration de la proposition n° 5 :

- Soit $(t,t') \in \mathbb{R}^2$, supposons que $t \leqslant t'$, alors $(X \leqslant t) \subset (X \leqslant t')$, par croissance de la probabilité, $\mathbb{P}(X \leqslant t) \leqslant \mathbb{P}(X \leqslant t')$, ainsi, $F_X(t) \leqslant F_X(t')$. Par conséquent, F_X est croissante.
- Comme F_X est croissante et majorée par 1, d'après le théorème de la limite monotone, F_X admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$. En particulier, $F_X(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$. Or, $1 - F_X(n) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant n) = \mathbb{P}(X > n)$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, posons $B_k = (X \in \,]\,k\,;k+1\,])$ et $B_0 = (X \in \,]\,-\infty\,;1\,])$, alors, les B_n sont deux à deux disjoints et $\Omega = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k$. Ainsi, $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_k)$. Donc, $\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(B_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, par différence, $\mathbb{P}(X > n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(B_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc $F_X(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, par unicité de la limite $\ell = 1$.
- On procède de même que pour la limite en $+\infty$.

Définition de l'indépendance de deux variables aléatoires

On dit que deux variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** si pour tous intervalles I et J :

$$\mathbb{P}((X \in I) \cap (Y \in J)) = \mathbb{P}(X \in I)\mathbb{P}(Y \in J)$$

Définition de l'indépendance mutuelle de n variables aléatoires

On dit que n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont **indépendantes** si pour tout $I_1, \ldots, I_n$ intervalles

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \in I_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in I_i)$$

Définition de l'indépendance mutuelle d'une famille de n variables aléatoires

On dit les variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **indépendantes** si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous $I_0, I_1, \ldots, I_n$ intervalles

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=0}^{n} (X_i \in I_i)\right) = \prod_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X_i \in I_i)$$