Exercice 0

1. Pour $\lambda = 5$ et $n \in \mathbb{N}$, en reconnaissant une somme télescopique :
$$\sum_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k) = u_{n+1}-u_0 = \frac{5^{n+1}}{1+5^{2n+2}} - \frac{1}{2}$$
Or, comme $5^{2n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, $1+5^{2n+2} \sim 5^{2n+2}$, ainsi, $\dfrac{5^{n+1}}{1+5^{2n+2}} \sim \dfrac{5^{n+1}}{5^{2n+2}} = \dfrac{1}{5^{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ainsi, $\sum\limits_{k=0}^{n}(u_{k+1}-u_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\dfrac{1}{2}$. Par conséquent, la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1}-u_n) = -\dfrac{1}{2}$
2. Soit $\lambda \in \,]0\,;1[$, remarquons que $0 \leqslant u_n \leqslant \lambda^n$ (car $1+\lambda^{2n} \geqslant 1$), or $\sum \lambda^n$ converge (série géométrique de raison $\lambda \in \,]-1\,;1[$), par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.
3.
```python
def SommePartielle(n,x):
    S = 0
    for i in range(n+1):
        S = S + x**i/(1 + x**(2*i))
    return S
```
4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$:
   - Si $\lambda = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 0$, $v_n = 0$ et w_1, alors $w_n \sim 1$, mais $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ n'ont pas d'équivalent.
   - Si $\lambda \in \,]-1\,;1[\,\backslash\{0\}$, $\lambda^{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ainsi, $1+\lambda^{2n} \sim 1$, par quotient d'équivalents, $u_n \sim \lambda^n$, $v_n \sim \lambda^{2n}$ et $w_n \sim 1$.
   - Si $\lambda \in \{1,-1\}$, $u_n = \dfrac{\lambda^n}{2}$, $v_n = w_n = \dfrac{1}{2}$, dans ce cas, $u_n \sim \dfrac{\lambda^n}{2}$ et $v_n \sim \dfrac{1}{2}$ et $w_n \sim \dfrac{1}{2}$
   - Si $\lambda \in \,]1\,;+\infty[\,\cup\,]-\infty\,;-1[$, $\lambda^{2n}+1 \sim \lambda^{2n}$, par quotient d'équivalents, $u_n \sim \dfrac{\lambda^n}{\lambda^{2n}} = \lambda^{-n}$, $v_n \sim 1$ et $w_n \sim \lambda^{-2n}$
5.
   - Si $\lambda = 0$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent mais $\sum w_n$ diverge grossièrement.
   - Si $\lambda \in \,]-1\,;1[\,\backslash\{0\}$, $|u_n| \sim |\lambda|^n$. Or, $\sum|\lambda|^n$ converge (série géométrique de raison $\lambda \in \,]-1\,;1[$), par théorème de comparaison de séries à termes positifs, $\sum|u_n|$ converge, donc $\sum u_n$ converge absolument donc converge. De plus, $\sum\lambda^{2n}$ converge (série géométrique de raison $\lambda^2 \in \,]-1\,;1[$), par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum v_n$ converge. Comme, $w_n \sim 1$, $w_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, donc $\sum w_n$ diverge grossièrement.
   - Si $\lambda \in \{-1,1\}$, $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{2}$, $w_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{2}$, si $\lambda = 1$, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ et si $\lambda = -1$, $(u_n)_n$ n'a pas de limite, dans tous les cas, $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ divergent grossièrement.
   - Si $\lambda \in \,]1\,;+\infty[\,\cup\,]-\infty\,;-1[$, $|u_n| \sim |\lambda^{-1}|^n$, or $|\lambda^{-1}| \in \,]-1\,;1[$, donc $\sum|\lambda^{-1}|$ converge (série géométrique dont la raison appartient à $]-1\,;1[$), par comparaison des séries à termes positifs, $\sum|u_n|$ converge, donc $\sum u_n$ converge absolument donc converge. $v_n \sim 1$ donc $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ ainsi, $\sum v_n$ diverge grossièrement. $|w_n| \sim |\lambda^{-2}|^n$, or $|\lambda^{-2}| \in \,]-1\,;1[$, donc $\sum|\lambda^{-2}|^n$ converge (série géométrique de raison appartenant à $]-1\,;1[$), par théorème de comparaison de séries à termes positifs, $\sum|w_n|$ converge, donc $\sum w_n$ converge absolument donc converge.

Condition / Série	$\lvert\lambda\rvert < 1$	$\lvert\lambda\rvert = 1$	$\lvert\lambda\rvert > 1$
$\sum u_n$	converge	diverge	converge
$\sum v_n$	converge	diverge	diverge
$\sum w_n$	diverge	diverge	converge

TABLE 1 – Nature des séries en fonction de λ.

Exercice 1

1. $u_0 = 2$, $u_1 = 2 \times \dfrac{3}{2} = 3$, $u_2 = \dfrac{15}{4}$

2. $u_{n+1} = \prod_{k=0}^{n+1}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = \left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\prod_{k=0}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) = \left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)u_n$

3. (a) Soit $n \geqslant 2$, en isolant le terme pour $k = 0$, $u_n = 2\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$, remarquons que pour tout $k \in [\![1\,; n]\!]$, $1+\frac{1}{2^k} \geqslant 1$, ainsi, $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \geqslant 1$, par conséquent, $u_n \geqslant 2$.

   (b) D'après la question 2, $u_{n+1} = \left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)u_n$, comme $u_n > 0$ (produit de nombres strictement positifs) et $\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right) \geqslant 1$, on en déduit que $u_{n+1} \geqslant u_n$, ainsi la suite (u_n) est croissante.

   (c) On pose $f : x \mapsto x - \ln(1+x)$, par composée et par somme, f est dérivable sur $]-1\,;+\infty[$, $f' : x \mapsto 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$.
   - Sur $]-1\,;0]$, f' est négative, donc f est décroissante sur $]-1\,;0]$, ainsi si $x \in]-1\,;0]$, $f(x) \geqslant f(0)$ donc $x - \ln(1+x) \geqslant 0$.
   - Sur $[0\,;+\infty[$, f' est positive, donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, ainsi, si $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant f(0)$ donc $x - \ln(1+x) \geqslant 0$.

   Ainsi, par disjonction de cas, on a montré que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

   (d) En utilisant la question 3c :

$$\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

4. La question 3d montre, par croissance de l'exponentielle, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \mathrm{e}^2$. Ainsi, la suite $(u_n)_n$ est majorée comme elle est aussi croissante, on peut en conclure qu'elle converge d'après le théorème de la limite monotone. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^2$, par passage à la limite dans les inégalités larges, on en déduit que ℓ, la limite de $(u_n)_n$, vérifie $2 \leqslant \ell \leqslant \mathrm{e}^2$.

5. (a) Comme $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$ et que le logarithme est continue en ℓ, $\ln(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln(\ell)$, comme le logarithme du produit est égale à la somme des logarithmes :

$$\sum_{k=0}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln(\ell)$$

   Ainsi, la série $\sum \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$ converge et $\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$. En retirant $\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$ à cette égalité, on obtient

$$\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right)$$

   (b) Comme, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\ln\left(1+\frac{1}{2^k}\right) \leqslant \frac{1}{2^k}$, par croissance de la somme,

$$\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{2^{-n-1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}$$

   De plus, $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right)$ est la somme d'une série à termes positifs, donc $\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \geqslant 0$.

   (c)

   (d)

   (e) i.

      ii.

   (f) i.

      ii.

Exercice 2

1. Au premier tirage, il y a 2 boules noires sur un total de quatre boules, ainsi, $\mathbb{P}(B_1) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$
2. A_1 et B_1 forment un système complet d'évènement, en effet, au premier tirage on a obtenu une boule blanche ou une boule noire et ces deux cas sont incompatibles, ainsi, d'après la formule des probabilités totales :
$$\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_2|B_1)\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2|A_1)\mathbb{P}(A_1)$$
Or, si on a tiré une boule blanche au premier tirage on s'arrête là et il n'y a pas de second tirage, donc $\mathbb{P}(B_2|A_1) = 0$. Si on a tiré une boule noire au premier tirage, au moment de faire le second tirage il y a donc 2 boules blanches et $2 + c$ boules noires, ainsi, $\mathbb{P}(B_2|B_1) = \dfrac{2+c}{4+c}$ et $\mathbb{P}(A_1) = \dfrac{1}{2}$, ainsi, $\mathbb{P}(B_2) = \dfrac{2+c}{4+c} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{2+c}{8+2c}$.
3. La famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \cup B$ est un système complet d'évènements. En effet au cours, de l'expérience soit on finit par obtenir une boule blanche soit on en obtient jamais. Si on en obtient une alors on est dans l'un des A_n et l'un seulement car on s'arrête-là les tirages (on ne peut donc tirer une boule blanche à un tirage ultérieur)
4. (a) Si $c = 0$, soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour observer l'évènement A_n, il faut avoir tiré que des boules noires aux $n-1$ premiers tirages avant d'avoir une boule blanche au n-ième, ainsi :
$$A_n = \bigcap_{k=1}^{n-1} B_k \cap \overline{B_n}$$
D'après la formule des probabilités composées,
$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(B_1) \times \prod_{k=2}^{n-1} \mathbb{P}(B_k|\bigcap_{i=1}^{k-1} B_i) \times \mathbb{P}(\overline{B_n}|\bigcap_{i=1}^{n-1} B_i)$$
Comme $c = 0$, le contenu de l'urne au k-ième tirage ou au n-ième tirage n'a pas changé, ainsi, $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{1}{2}\prod_{k=2}^{n-1}\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2^n}$.

   (b) Comme, on a un système complet d'évènements, $\sum \mathbb{P}(A_n)$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) + \mathbb{P}(B) = 1$, ainsi, $\mathbb{P}(B) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^k} = 1 - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 0$. Dès lors, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système quasi-complet d'évènements.
5. $A_3 = B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3}$, d'après la formule des probabilités composées :
$$\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}(B_2|B_1) \times \mathbb{P}(\overline{B_3}|B_2 \cap B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{2+c}{4+c} \times \frac{2}{4+2c} = \frac{2+c}{(4+c)(4+2c)} = \frac{1}{2(4+c)}$$
En effet, si une boule noire a été tirée au premier tirage, il y a avant de faire le deuxième tirage $2 + c$ boules noires et $4 + c$ boules au total, si on a tiré une boule noire aux deux premiers tirages, il y a, avant de faire le troisième tirage, 2 boules blanches et $4 + c + c$ boules au total.
6. Par définition de E_n, $E_n = \bigcap_{k=1}^{n} B_k$. Ainsi, d'après la formule des probabilités composées,
$$\mathbb{P}(E_n) = \mathbb{P}(B_1) \times \prod_{k=2}^{n} \mathbb{P}(B_k|\bigcap_{i=0}^{k-1} B_i)$$
Or, au moment de faire le k-ième tirage, on a déjà fait $k-1$ tirages et on a donc rajouté $(k-1)c$ boules noires, ainsi, $\mathbb{P}(B_k|\bigcap_{i=0}^{k-1} B_i) = \dfrac{2+(k-1)c}{4+(k-1)c}$, ainsi, en effectuant un changement d'indice $j = k - 1$:
$$\mathbb{P}(E_n) = \frac{2}{4}\prod_{k=2}^{n}\frac{2+(k-1)c}{4+(k-1)c} = \frac{2}{4}\prod_{j=1}^{n-1}\frac{2+jc}{4+jc} = \prod_{j=0}^{n-1}\frac{2+jc}{4+jc}$$

7. (a) Comme $c = 1$, en utilisant la question 6, et en effectuant des changements d'indices :

$$\mathbb{P}(E_n) = \frac{\prod_{j=0}^{n-1}(2+j)}{\prod_{j=0}^{n-1}(4+j)} = \frac{\prod_{k=2}^{n+1} k}{\prod_{i=4}^{n+3} i} = \frac{2 \times 3}{(n+2)(n+3)} = \frac{6}{(n+2)(n+3)}$$

Comme $B \subset E_n$, par croissance de la probabilité, $\mathbb{P}(B) \leqslant \mathbb{P}(E_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, comme le passage à la limite conserve les inégalités larges, on en déduit que $\mathbb{P}(B) \leqslant 0$, par positivité de la probabilité, on en conclut que $\mathbb{P}(B) = 0$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = E_{n-1} \cap A_n$, en effet, réaliser le n-ième tirage demande d'avoir effectué les $n-1$ premiers et avoir obtenu que des boules noires lors de ces $n-1$ premier tirages. Ainsi, $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(E_{n-1})\mathbb{P}(A_n|E_{n-1})$. Or, si l'évènement E_{n-1} est réalisé, juste avant de faire le n-ième tirage, il y a $2 + (n-1) = n+1$ boules noires et 2 boules blanches, ainsi, $\mathbb{P}(A_n|E_{n-1}) = \dfrac{2}{n+3}$ et $\mathbb{P}(E_{n-1}) = \dfrac{6}{(n+1)(n+2)}$, par produit, on obtient :

$$\mathbb{P}(A_n) = \frac{12}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

8. (a) En reprenant le résultat de la question 6 avec $c = 2$, on obtient

$$\mathbb{P}(E_n) = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2+2k}{4+2k} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1+k}{2+k} = \frac{1}{n+1}$$

(où on a reconnu un produit télescopique). On peut en déduire que $\mathbb{P}(E_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Or, remarquons que $B \subset E_n$, par croissance de la probabilité, $\mathbb{P}(B) \leqslant \mathbb{P}(E_n)$, comme le passage à la limite conserve les inégalités larges, on en déduit que $\mathbb{P}(B) \leqslant 0$, par positivité de la probabilité, on en conclut que $\mathbb{P}(B) = 0$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $A_n = E_{n-1} \cap A_n$, ainsi, $\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(E_{n-1})\mathbb{P}(A_n|E_{n-1})$, or si l'évènement E_{n-1} est réalisé, juste avant de faire le n-ième tirage, il y a $2 + 2(n-1) = 2n$ boules noires et 2 boules blanches, ainsi, $\mathbb{P}(A_n|E_{n-1}) = \dfrac{2}{2n+2}$ et $\mathbb{P}(E_{n-1}) = \dfrac{1}{n}$, par produit, $\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$

9. (a) En passant à l'inverse le résultat de la question 6, on obtient :

$$\mathbb{P}(E_n)^{-1} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(2+kc)+2}{2+kc} = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{2}{2+kc}\right)$$

Puis en appliquant le logarithme, on obtient bien :

$$-\ln(\mathbb{P}(E_n)) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{2}{2+kc}\right)$$

(b) Comme $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, on obtient que $\ln\left(1 + \dfrac{2}{2+nc}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{2+nc} \sim \dfrac{2}{nc}$, or comme $\sum \dfrac{2}{nc}$ diverge (série harmonique à une constante non nul multiplicative près), par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \ln\left(1 + \dfrac{2}{2+nc}\right)$ diverge, Or, si on note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la somme partielle

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{2}{2+kc}\right)$$

Or, nous sommes en présence d'une série à termes positifs, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, comme elle diverge, d'après le théorème de la limite monotone, $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, ainsi, $-\ln(\mathbb{P}(E_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, soit $\ln(\mathbb{P}(E_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$, et comme $e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$, on peut en déduire que $\mathbb{P}(E_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Or, remarquons que $B \subset E_n$, par croissance de la probabilité, $\mathbb{P}(B) \leqslant \mathbb{P}(E_n)$, comme le passage à la limite conserve les inégalités larges, on en déduit que $\mathbb{P}(B) \leqslant 0$, par positivité de la probabilité, on en conclut que $\mathbb{P}(B) = 0$.