Loi de variables aléatoires

Exercice 1 ($\star$)**.** Si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathscr{U}(\llbracket 0\,;n \rrbracket)$, avec X et Y indépendantes, déterminer $\mathbb{P}(X=Y)$.

Exercice 2 ($\star$)**.** Si $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1\,;10 \rrbracket)$, quelle est la loi de $Y = \lfloor \sqrt{X} \rfloor$ et que vaut $\mathbb{E}(Y)$?

Exercice 3 ($\star$ Mod, Cal ©)**.** Un service après-vente dispose d'équipes de dépannage qui interviennent auprès de la clientèle sur appel téléphonique. Les appels se produisent de façon indépendante, et la probabilité qu'un retard se produise dans le dépannage à la suite d'un appel est $p = 1/4$.

1. Un même client a appelé le service à 8 dates différentes. Soit X le nombre de retards que ce client a subi. Définir la loi de probabilité de X. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
2. On considère un ensemble de 8 clients différents. 2 d'entre eux sont mécontents parce qu'ils ont subi un retard. On contacte 4 clients parmi les 8. Soit M le nombre de clients mécontents parmi les 4 contactés. Expliciter la loi de M et calculer $\mathbb{E}(M)$.

Exercice 4 ($\star$ Rai, Mod ©)**.** Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules rouges. Un joueur tire successivement n boules avec remise. En tirant une boule rouge, il gagne 2 points, sinon il en perd 3. Soit X_n le nombre de boules rouges et Y_n le nombre de points obtenus. Déterminer la loi de X_n, $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$. Exprimer Y_n en fonction de X_n. En déduire la loi de Y_n, $\mathbb{E}(Y_n)$ et $\mathbb{V}(Y_n)$.

Exercice 5 ($\star$ Cai, Rai ©)**.** Une puce, initialement à 0, se déplace de $+1$ ou de $+2$ à chaque saut de façon équiprobable et de façon indépendante. Soit X_n la position occupée par la puce après n sauts et Y_n le nombre de fois où la puce a sauté d'une seule case au cours des n premiers sauts. Donner la loi de Y_n, $\mathbb{E}(Y_n)$ et $\mathbb{V}(Y_n)$. Exprimer X_n en fonction de Y_n et n. En déduire $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$ puis la loi de X_n.

Exercice 6 ($\star\star$)**.** On dispose de deux urnes U_1 et U_2, de six boules numérotées de 1 à 6 ainsi que d'un dé équilibré. Initialement, l'urne U_1 contient les boules numérotées 1 et 2, l'urne U_2 contient les boules numérotées $3, 4, 5$ et 6. On appelle échange l'expérience consistant à lancer une fois le dé et à changer d'urne la boule portant le numéro obtenu avec le dé. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans U_1 après n échanges successifs.

1. Les cinq premiers lancers du dé donnent : $1, 3, 2, 3, 5$. Quel est le contenu de U_1 à l'issue du cinquième échange ?
2. Quelle est la loi de X_1 ? Calculer $\mathbb{E}(X_1)$.
3. Déterminer $\mathbb{P}(X_1 = a, X_2 = b)$ pour tout $a \in X_1(\Omega)$ et $b \in X_2(\Omega)$. En déduire la loi de X_2.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \llbracket 1\,;5 \rrbracket$, on a :
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1}=0) &= \frac{1}{6}\mathbb{P}(X_n=1), \quad \mathbb{P}(X_{n+1}=6) = \frac{1}{6}\mathbb{P}(X_n=5) \\ \mathbb{P}(X_{n+1}=k) &= \frac{7-k}{6}\mathbb{P}(X_n=k-1) + \frac{k+1}{6}\mathbb{P}(X_n=k+1) \end{aligned}$$
5. ©En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{E}(X_{n+1}) = \frac{2}{3}\mathbb{E}(X_n)+1$. Calculer alors $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de n, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$.

Exercice 7 ($\star$)**.** Soient $X \sim \mathscr{B}(p)$ et $Y \sim \mathscr{B}(q)$ avec $(p,q) \in \,]\,0\,;1\,[^2$ tel que X et Y sont indépendantes. On pose $Z = \min(X,Y)$. Calculer la loi de Z.

Exercice 8. On considère une urne contenant quatre boules rouges et trois boules noires. On pioche une à une sans remise les boules de l'urne. Pour tout entier $i \in \llbracket 1\,;3 \rrbracket$. On note X_i le nombre de tirages nécessaires pour obtenir la i-ième boule noire et $T = X_2 - X_1$

1. Donner la loi de X_1 ainsi que son espérance et sa variance.
2. Déterminer $\mathbb{P}(X_1 = a \cap X_2 = b)$ pour tout $a \in X_1(\Omega)$ et $b \in X_2(\Omega)$. En déduire la loi de X_2.
3. Que représente T ? Donner son espérance.
4. Déterminer $\mathbb{P}(T = a \cap X_1 = b)$ pour tout $a \in T(\Omega)$ et $b \in X_1(\Omega)$ puis la loi de T.
5. Donner la loi de X_3.

Exercice 9. Un joueur lance une pièce équilibrée autant de fois que nécessaire . On note X_N la variable aléatoire réelle discrète égale au nombre de fois où, au cours des N premiers lancers, deux résultats successifs ont été différents (X_N le «nombre de changements» au cours des N premiers lancers). Par exemple, si les 9 premiers lancers ont donné successivement : P , P, F, P, F, F, F, P, P alors la variable X_9 aura pris la valeur 4 (quatre changements, aux 3-ième 4-ième, 5-ième et 8-ième lancers).

1. Déterminer la loi de X_1, X_2, X_3, X_4.
2. Justifier que $X_N(\Omega) = [\![0 ; N-1]\!]$.
3. Montrer que $\mathbb{P}(X_N = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}$ et $\mathbb{P}(X_N = 1) = 2(N-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{N}$.
4. (a) Justifier que pour tout $k \in [\![0 ; N-1]\!]$, $\mathbb{P}_{(X_N=k)}(X_{N+1} = k) = \frac{1}{2}$
   (b) En déduire que pour tout $k \in [\![0 ; N-1]\!]$
   $$\mathbb{P}((X_{N+1} - X_N = 0) \cap (X_N = k)) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_N = k)$$
   (c) En sommant cette relation pour $k \in [\![0 ; N-1]\!]$, montrer que $\mathbb{P}(X_{N+1} - X_N = 0) = \frac{1}{2}$.
   (d) Que représente la variable $X_{N+1} - X_N$? En déduire que $X_{N+1} - X_N \sim \mathscr{B}(1/2)$. En déduire $\mathbb{E}(X_{N+1}) = \frac{1}{2} + \mathbb{E}(X_N)$, puis donner $\mathbb{E}(X_N)$ en fonction de N.
5. (a) Montrer que les variables $X_{N+1} - X_N$ et X_N sont indépendantes.
   (b) En déduire par récurrence sur N que $X_N \sim \mathscr{B}(N-1, \frac{1}{2})$.

Exercice 10 (⋆⋆ Cal, Mod ©)**.** Un étudiant résout un QCM constitué de n questions avec quatre réponses possibles. Pour chaque question, et indépendamment les unes des autres, il a la probabilité p de savoir résoudre et donc d'avoir la bonne réponse. Si en revanche, il ne sait pas résoudre la question, il choisit arbitrairement l'une des quatre réponses possibles. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de questions qu'il savait résoudre et Y le nombre de questions qu'il a correctement résolues parmi celles où il a répondu au hasard. On note $Z = X + Y$ le nombre de questions correctes au total.

1. Reconnaître la loi de X.
2. Calculer $\mathbb{P}(Y = j | X = k)$.
3. Décrire l'évènement $(Z = i)$ en fonction des évènements $(Y = j) \cap (X = k)$.
4. En déduire la loi de Z.
5. En déduire la valeur de p minimal pour que $\mathbb{E}(Z) \geqslant \frac{n}{2}$ (*i.e.* il passe le test).

Exercice 11. On tire, avec remise, cinq boules d'une urne contenant dix boules numérotés de 1 à 10. On note X la variable aléatoire égale au maximum des cinq numéros obtenus et Y la variable aléatoire égale au minimum des cinq numéros obtenus.

1. Déterminer $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(X \leqslant k)$ pour $k \in X(\Omega)$ et $\mathbb{P}(Y \geqslant k)$ pour $k \in Y(\Omega)$. En déduire les lois de X et Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 12 (⋆⋆ Rai, Rec ©)**.** Un sac contient n billes numérotées de 1 à n. On tire une bille au hasard, on note son numéro et on la remet dans le sac. On appelle X la variable aléatoire qui prend pour valeur ce numéro. Lorsque ce numéro est k, on tire sans remise k billes que l'on distribue au hasard dans p boites $B_1, ..., B_p$. On note Y_i la variable aléatoire égale au nombre de billes placées dans la boite B_i pour $i \in [\![1 ; p]\!]$.

1. Soit $i \in [\![1 ; p]\!]$. Déterminer $\mathbb{P}(X = a \cap Y_i = b)$ pour tout $a \in X(\Omega)$ et $b \in Y_i(\Omega)$
2. En déduire pour $i \in [\![1 ; p]\!]$ la loi de Y_i sous forme d'une somme (que l'on ne cherchera pas à calculer).
3. Déterminer $\mathbb{E}(Y_i)$ puis $\mathbb{E}(\frac{Y_i}{X})$.

Espérance et variance

Exercice 13 (⋆ Rai ©)**.** Soit X une variable aléatoire tel que X et X^2, montrer que $\mathbb{E}(X)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2)$.

Exercice 14 (⋆⋆ Mod, Cal ©)**.** 1600 voyageurs se présentant en même temps à la gare de A pour aller à la gare B grâce à deux trains identiques. On suppose que chaque individu choisit au hasard l'un des deux trains et qu'il n'en changera pas. Combien faut-il de places assises dans chaque train pour qu'il y ait moins de 1% de chance que des voyageurs soient obligés de rester debout ?

Exercice 15 (⋆⋆ Cal ©)**.** Soit $X \sim \mathscr{B}(n, p)$. Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right)$.

Exercice 16 (𝄞⋆⋆ ©)**.** Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) \subset [\![0 ; n]\!]$, montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k)$.