Approximations d'intégrales

Soit f une fonction continue sur un segment $[\,a\,;b\,]$. On découpe ce segment en N segments de la forme $[\sigma_i, \sigma_{i+1}]$ tous de même longueur h.

1. Donner la valeur de h et de σ_i pour $i \in [\![\,0\,;n\,]\!]$.
2. On appelle **méthode des rectangles à gauche**, la méthode qui consiste à approximer $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ par la somme des aires des rectangles dont la base est $[\,\sigma_i\,;\sigma_{i+1}\,]$ et la hauteur vaut $f(\sigma_i)$. Faire un dessin de la situation. Donner l'expression mathématique de cette somme, puis coder une fonction Python `RectangleGauche(a,b,f,N)` qui renvoie cette somme.
3. Étudier mathématiquement la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{\frac{k}{n}} + \left(\frac{k}{n}\right)^5\right)$$

4. On appelle **méthode des rectangles à droite**, la même méthode, sauf que la hauteur vaut maintenant $f(\sigma_{i+1})$. Donner l'expression mathématique de cette somme puis coder une fonction Python `RectangleDroite(a,b,f,N)` qui renvoie cette somme.
5. On appelle **méthode des trapèzes**, la méthode qui approxime $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ comme une somme des aires des trapèzes telle que chaque trapèze soit constitué des points de coordonnées $(\sigma_i, 0)$, $(\sigma_{i+1}, 0)$, $(\sigma_{i+1}, f(\sigma_{i+1}))$ et $(\sigma_i, f(\sigma_i))$. Faire un dessin de la situation. Démontrer que cette somme vaut

$$h\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(\sigma_k)\right)$$

puis coder une fonction Python `Trapeze(a,b,f,N)` qui renvoie cette somme.
6. On considère $f\colon x \mapsto \sqrt{1-x^2}$, afficher sur un même graphe, les approximations de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ par les trois méthodes en fonction de N un entier variant entre 2 et 10^3.
7. Comparer le résultat des approximations pour $N = 10^3$ à la vraie valeur de l'intégrale. Laquelle de ces méthodes est la plus proche ?
8. En écrivant $\ln(x)$ comme une certaine intégrale, définir deux fonctions qui approxime $\ln(x)$ l'une avec la méthode des rectangles (à gauche ou à droite) et l'autre avec la méthode des trapèzes avec $N = 10$.
9. Dessiner sur $[\,0.01\,;10\,]$ la courbe du logarithme ainsi que des deux approximations définies à la question précédente, on dessinera les 3 courbes avec cents points.

Dichotomie

On rappelle le principe de la **dichotomie** : si $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$, alors, on détermine une approximation de x un antécédent de y par f (qui existe si f est continue sur $[\,a\,;b\,]$ en vertu du théorème des valeurs intermédiaires), de la façon suivante : on pose $c = \dfrac{a+b}{2}$ si $y \leqslant f(c)$ alors on recommence sur le segment $[\,a\,;c\,]$, sinon on regarde sur le segment $[\,c\,;b\,]$.

10. Dans le cas où $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$, écrire une fonction `Dichotomie(a,b,f,y,epsilon)` qui renvoie une approximation de x à $\varepsilon > 0$ près.
11. Adapter la fonction précédente pour qu'elle fonctionne si $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$ et si $f(b) \leqslant y \leqslant f(a)$.
12. Remarquer que les deux conditions de la question précédente se réunissent en une seule : $(y - f(a)) \times (f(b) - y) \geqslant 0$ et écrire une fonction `Dichotomie2` qui ne distingue pas le cas $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$ et le cas $f(b) \leqslant y \leqslant f(a)$.
13. Démontrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{e}^x = \sin(x)$.
14. Représenter sur l'intervalle $[\,-13\,;1\,]$ la courbe de sinus, celle d'exponentielle et le point d'intersection approximé par la dichotomie.

Méthode de Newton

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On suppose que f s'annule et on cherche à trouver une approximation de x tel que $f(x) = 0$. Partant d'un point $x_0 \in I$, on construit (sous hypothèse que c'est possible) une suite $(x_n)_n$ de la façon suivante : si x_n est construit et $x_n \in I$, on considère la tangente à f en x_n, on détermine son équation, puis on calcule l'abscisse du point d'intersection entre cette tangente et l'axe des abscisses, si la tangente n'est pas horizontale, un tel point d'intersection existe et on note x_{n+1} son abscisse. Ainsi, on construit une suite $(x_n)_n$ dont on espère qu'elle converge vers x où $f(x) = 0$, cette méthode s'appelle la **méthode de Newton**.

15. Faire un dessin de la situation et déterminer l'expression de x_{n+1} en fonction de x_n.
16. Programmer la méthode de Newton sous une fonction `Newton(x0,f,df,n)` qui renvoie x_n.
17. Utiliser cette méthode pour déterminer une approximation de x qui annule $x \mapsto \mathrm{e}^x - \sin(x)$.
18. Reprendre le graphe de la question 14 et y rajouter le point d'intersection que l'on a approximé par la méthode de Newton.

Méthode de la sécante

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On suppose que f s'annule, partant de $x_0 \in I$ et de $x_1 \in I$, on construit (sous hypothèse que c'est possible) une suite $(x_n)_n$ de la façon suivante : on considère la droite coupant la courbe de f en x_n et x_{n+1} dans le cas ou cette droite n'est pas horizontale, cette droite coupe l'axe des abscisses en un point dont on note x_{n+2}. De même, on espère obtenir une suite $(x_n)_n$ tel que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ où $f(x) = 0$, cette méthode s'appelle la **méthode de la sécante**.

19. Donner une expression de x_{n+2} en fonction de x_n et de x_{n+1}.
20. Écrire une fonction `Secante(x0,x1,f,n)` qui renvoie x_n.

Approximations d'intégrales (le retour)

Soit f une fonction continue sur $[\,a\,;b\,]$ et à valeurs positives, on suppose que f est majorée par M. Ainsi, l'intégrale de f sur $[\,a\,;b\,]$ est une aire sous la courbe incluse dans un rectangle de base $[\,a\,;b\,]$ et de hauteur M. On prend N points aléatoires dans le rectangle $[\,a\,;b\,]\times[\,0\,;M\,]$. Et on compte ceux qui sont sous la courbe de f. Si N est assez grand, on espère que le ratio entre l'intégrale de f et l'aire du rectangle de M est environ ou égale à celle du ratio entre le nombre de points sous la courbe de f et le nombre de points total. Cette méthode s'appelle la méthode de **Monte-Carlo**.

21. Quelle est l'aire du rectangle $[\,a\,;b\,] \times [\,0\,;M\,]$?
22. Si $x \in [\,a\,;b\,]$ et $y \in [\,0\,;M\,]$, comment savoir si le point de coordonnées (x, y) est sous la courbe ou non ?
23. Écrire une fonction `MonteCarlo(a,b,M,f,N)` qui renvoie l'approximation de l'intégarle.
24. Tester pour la fonction $f\colon x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ sur $[\,0\,;1\,]$.
25. Écrire une fonction `NbPoints(epsilon)` qui renvoie la valeur de N nécessaire pour trouver une approximation de $\displaystyle\int_0^1 f$ à epsilon près. Tester avec $\varepsilon \in \left\{10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-4}\right\}$.