Correction de l'exercice 1.

Correction de l'exercice 2.

Correction de l'exercice 3. 1. À chaque appel, le client a une probabilité de p pour avoir un retard, chaque appel suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $p = 1/4$. Comme il y a 8 appels indépendants, $X \sim \mathscr{B}(8, 1/4)$. Ainsi, $\mathbb{E}(X) = np = 2$ et $\mathbb{V}(X) = np(1-p) = \dfrac{3}{2}$.

2. Observons que $M(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. Numérotons les clients de 1 à 8 et disons que ce sont les clients 7 et 8 qui ont eu un retard. On appel quatre clients au hasard, cela revient donc à choisir une partie à quatre éléments dans $[\![1\,;8]\!]$. Il y a $\dbinom{8}{4}$ donc possibilités et ces possibilités sont équiprobables.

   - $M = 0$ lorsqu'il n'y a pas de client mécontents, c'est-à-dire lorsqu'on a appelé quatre clients parmi les 6 premiers, il y a donc $\dbinom{6}{4}$ possibilités. Ainsi,

   $$\mathbb{P}(M = 0) = \frac{\dbinom{6}{4}}{\dbinom{8}{4}} = \frac{3}{14}$$

   - $M = 2$ lorsqu'il y a les clients 7 et 8 dans le groupe des quatre appelés, il faut donc appeler 7 et 8 ainsi que 2 autres clients parmi les 6 premiers, cela fait donc $\dbinom{6}{2}$ possibilités. Donc

   $$\mathbb{P}(M = 2) = \frac{\dbinom{6}{2}}{\dbinom{8}{4}} = \frac{3}{14}$$

   - $\mathbb{P}(M = 0) + \mathbb{P}(M = 1) + \mathbb{P}(M = 2) = 1$. Ainsi[1], $\mathbb{P}(M = 1) = 1 - \mathbb{P}(M = 0) - \mathbb{P}(M = 2) = \dfrac{4}{7}$.

   $\mathbb{E}(M) = 0\mathbb{P}(M = 0) + 1\mathbb{P}(M = 1) + 2\mathbb{P}(M = 2) = 1$

Correction de l'exercice 4. À chaque tirage, le joueur à une probabilité de $p = 8/10 = 4/5$ d'avoir une boule rouge. Et comme il y a remise, ce tirage est indépendant des autres, comme il y a n tirages, on en déduit que $X_n \sim \mathscr{B}(n, p)$. Ainsi, $\mathbb{E}(X_n) = np = 4n/5$ et $\mathbb{V}(X_n) = np(1-p) = 4n/25$.

Comme X_n est le nombre de boules rouges tirées (qui rapportent chacune 2 points) et $n - X_n$ est le nombre de boules blanches tirées (qui lui font perdre chacune 3 points), on a

$$Y_n = 2X_n - 3(n - X_n) = 5X_n - 3n = f(X_n)$$

Si on pose $f\colon x \mapsto 5x - 3$. On sait que $X_n(\Omega) = [\![0\,;n]\!]$, ainsi $Y_n(\Omega) = f([\![0\,;n]\!]) = \{5k - 3 \quad k \in [\![0\,;n]\!]\}$. Soit $y \in Y_n(\Omega)$, comme f est strictement croissante, il existe un unique $k \in [\![0\,;n]\!]$ tel que $y = f(k) = 5k - 3$, alors

$$\mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{4}{5}\right)^k\left(\frac{1}{5}\right)^{n-k} = \binom{n}{(y+3)/5}\frac{4^{\frac{y+3}{5}}}{5^n}$$

De plus, comme $Y_n = 5X_n - 3n$, on a, par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Y_n) = 5\mathbb{E}(X_n) - 3n = 4n - 3n = n$. Et $\mathbb{V}(Y_n) = 25\mathbb{V}(X_n) = 4n$.

1. On peut aussi raisonner combinatoirement : $M = 1$ ssi il y un client mécontent parmi les 2 et trois clients content parmi les 6, ainsi $\mathbb{P}(M = 1) = \dfrac{\binom{2}{1}\binom{6}{3}}{\binom{8}{4}} = \dfrac{4}{7}$.

Correction de l'exercice 5. Y_n suit une loi binomiale de paramètres $(n, 1/2)$, ainsi $\mathbb{E}(Y_n) = n/2$ et $\mathbb{V}(Y_n) = n/4$. On remarque que $X_n = 1 \times Y_n + 2 \times (n - Y_n) = 2n - Y_n$. Ainsi, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}(2n - Y_n) = 2n - \mathbb{E}(Y_n) = 2n - n/2 = 3n/2$$

Et $\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{V}(2n - Y_n) = \mathbb{V}(Y_n) = n/4$. De plus, on remarque que $X_n = f(Y_n)$, avec $f\colon x \mapsto 2n - x$. Comme $Y_n(\Omega) = [\![0\,; n]\!]$, on en déduit que $X_n(\Omega) = \{f(0), f(1), \ldots, f(n)\} = \{2n, 2n-1, \ldots, n\} = [\![n\,; 2n]\!]$. Soit $k \in [\![n\,; 2n]\!]$, alors

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(2n - Y_n = k) = \mathbb{P}(Y_n = 2n - k) = \binom{n}{2n-k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{2n-k}\frac{1}{2^n}$$

Correction de l'exercice 6.

1.
2.
3.
4.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = 3) \\ \mathbb{P}(X_n = 4) \\ \mathbb{P}(X_n = 5) \\ \mathbb{P}(X_n = 6) \end{pmatrix}$, et $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. On remarque que $\mathbb{E}(X_n) = LA_n$.

   De plus, d'après les relations de la question précédente, $A_{n+1} = MA_n$ en définissant la matrice M par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_7(\mathbb{R})$$

   On a alors $\mathbb{E}(X_{n+1}) = LA_{n+1} = LMA_n = (LM)A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} & 3 & \frac{11}{3} & \frac{13}{3} & 5 \end{pmatrix} A_n$ Or,

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} & \frac{7}{3} & 3 & \frac{11}{3} & \frac{13}{3} & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}L$$

   On observe que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} A_n = 1$, ainsi $\mathbb{E}(X_{n+1}) = 1 + \frac{2}{3}LA_n = 1 + \frac{2}{3}\mathbb{E}(X_n)$. La suite $(\mathbb{E}(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. Remarquons que $\ell = \frac{2}{3}\ell + 1$ ssi $\frac{1}{3}\ell = 1$ ssi $\ell = 3$, ainsi

$$\begin{cases} \mathbb{E}(X_{n+1}) & = & \frac{2}{3}\mathbb{E}(X_n) + 1 \\ \ell & = & \frac{2}{3}\ell + 1 \end{cases}$$

   Par différence, $\mathbb{E}(X_{n+1}) - \ell = \frac{2}{3}(\mathbb{E}(X_n - \ell)$. Ainsi, $(\mathbb{E}(X_n) - 3)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $2/3$ Dès lors, $\mathbb{E}(X_n) - 3 = (\mathbb{E}(X_1) - 3)(2/3)^{n-1}$. Par conséquent, $\mathbb{E}(X_n) = 3 + (\mathbb{E}(X_1) - 3)(2/3)^{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 3$.

Correction de l'exercice 7.

Correction de l'exercice 8. 1. On note B_i l'évènement la i-ième boule tirée est noire. On remarque que comme il y a quatre boules rouges et que le tirage est sans remise, on tirera la première boule noire soit au premier tirage, soit au deuxième, soit au troisième, soit au quatrième soit au cinquième. Ainsi, $X(\Omega) = [\![1\,;5]\!]$.

- $(X_1 = 1)$ veut dire que dès le premier tirage on a tiré une boule noire donc $(X_1 = 1) = B_1$, ainsi $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(B_1) = 3/7$.
- L'évènement $(X_1 = 2)$ veut dire qu'il a fallu 2 tirages pour atteindre la première boule noire, ainsi cet évènement est réalisé ssi la première boule était blanche et si la deuxième est noire, dès lors $(X_1 = 2) = \overline{B_1} \cap B_2$ donc

$$\mathbb{P}(X_1 = 2) = \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap B_2) = \mathbb{P}(B_2|\overline{B_1})\mathbb{P}(\overline{B_1}) = \frac{3}{6} \times \frac{4}{7} = \frac{2}{7}$$

- De même $(X_1 = 3)$ veut dire qu'il a fallu trois tirages avant d'obtenir la première boule noire donc que les deux premières étaient rouges donc $(X_1 = 3) = \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3$ ainsi d'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(X_1 = 3) = \mathbb{P}\left(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap B_3\right) = \mathbb{P}(B_3|\overline{B_1} \cap \overline{B_2})\mathbb{P}(\overline{B_2}|\overline{B_1})\mathbb{P}(\overline{B_1}) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{6} \times \frac{4}{7} = \frac{6}{35}$$

- De même $(X_1 = 4)$ veut dire qu'il a fallu quatre tirages avant d'obtenir la première boule noire donc que les trois premières étaient rouges donc $(X_1 = 4) = \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap B_4$ ainsi d'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(X_1 = 4) = \mathbb{P}\left(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap B_4\right) = \mathbb{P}(B_4|\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap\overline{B_3})\mathbb{P}(\overline{B_3}|\overline{B_1}\cap\overline{B_2})\mathbb{P}(\overline{B_2}|\overline{B_1})\mathbb{P}(\overline{B_1}) = \frac{3}{4}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{6}\times\frac{4}{7} = \frac{3}{35}$$

- Enfin $(X_1 = 5)$ veut dire qu'il a fallu cinq tirages avant d'obtenir la première boule noire donc que les quatre premières étaient rouges donc $(X_1 = 5) = \overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_3} \cap \overline{B_4} \cap B_5$ ainsi d'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}(X_1 = 5) = \mathbb{P}(B_5|\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap\overline{B_3}\cap\overline{B_4})\mathbb{P}(\overline{B_4}|\overline{B_1}\cap\overline{B_2}\cap\overline{B_3})\mathbb{P}(\overline{B_3}|\overline{B_1}\cap\overline{B_2})\mathbb{P}(\overline{B_2}|\overline{B_1})\mathbb{P}(\overline{B_1}) = \frac{3}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{6}\times\frac{4}{7} = \frac{1}{35}$$

On a donc trouvé la loi de[2] X_1. De plus,

$$\mathbb{E}(X_1) = 1\mathbb{P}(X_1 = 1) + 2\mathbb{P}(X_1 = 2) + 3\mathbb{P}(X_1 = 3) + 4\mathbb{P}(X_1 = 4) + 5\mathbb{P}(X_1 = 5) = \frac{3}{7} + \frac{4}{7} + \frac{18}{35} + \frac{12}{35} + \frac{5}{35} = 2$$

D'après la formule de Köenig-Huygens $\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{E}({X_1}^2) - \mathbb{E}(X_1)^2 = \mathbb{E}({X_1}^2) - 4$, or on calcule $\mathbb{E}({X_1}^2)$ grâce à la formule de transfert :

$$\mathbb{E}({X_1}^2) = 1\mathbb{P}(X_1 = 1)+4\mathbb{P}(X_1 = 2)+9\mathbb{P}(X_1 = 3)+16\mathbb{P}(X_1 = 4)+25\mathbb{P}(X_1 = 5) = \frac{3}{7}+\frac{8}{7}+\frac{54}{35}+\frac{48}{35}+\frac{25}{35} = \frac{26}{5}$$

Et donc $\mathbb{V}(X_1) = \dfrac{26}{5} - 4 = \dfrac{6}{5}$.

2. Remarquons que $X_2 > X_1$ et que comme il y a que 4 boules rouges, en six tirages on est sûr d'avoir deux boules noires, donc que $X_2 \leqslant 6$. On va donc calculer $\mathbb{P}((X_1 = a) \cap (X_2 = b))$ pour tout couple (a, b) tel que $1 \leqslant a < b \leqslant 6$:
   - Remarquons que $((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2)) = B_1 \cap B_2$, ainsi

$$\mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 2)) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_2|B_1)\mathbb{P}(B_1) = \frac{2}{6} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{7}$$

2. On vérifie que $\mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 2) + \mathbb{P}(X_1 = 3) + \mathbb{P}(X_1 = 4) + \mathbb{P}(X_1 = 5) = 1$

- Remarquons que $((X_1=1)\cap(X_2=3)) = B_1\cap\overline{B_2}\cap B_3$, ainsi d'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}((X_1=1)\cap(X_2=3)) = \mathbb{P}(B_1\cap\overline{B_2}\cap B_3) = \mathbb{P}(B_3|B_1\cap\overline{B_2})\mathbb{P}(\overline{B_2}|B_1)\mathbb{P}(B_1) = \frac{2}{5}\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{7} = \frac{4}{35}$$

- Remarquons que $((X_1=1)\cap(X_2=3)) = B_1\cap\overline{B_2}\cap B_3$, ainsi d'après la formule des probabilités composées :

$$\mathbb{P}((X_1=1)\cap(X_2=3)) = \mathbb{P}(B_1\cap\overline{B_2}\cap B_3) = \mathbb{P}(B_3|B_1\cap\overline{B_2})\mathbb{P}(\overline{B_2}|B_1)\mathbb{P}(B_1) = \frac{2}{5}\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{7} = \frac{4}{35}$$

$X_2\backslash X_1$	1	2	3	4	5
2	1/7	0	0	0	0
3	4/35		0	0	0
4				0	0
5					0
6					

3. Que représente T ? Donner son espérance.
4. Déterminer $\mathbb{P}(T=a, X_1=b)$ pour tout $a\in T(\Omega)$ et $b\in X_1(\Omega)$ puis la loi de T.
5. Donner la loi de X_3.

Correction de l'exercice 9.

Correction de l'exercice 10. 1. X est le nombre de succès de n expériences indépendantes dont la probabilité de succès est p, ainsi X suit une loi binomiale de paramètres (n,p).

2. Soit $k\in[\![0\,;n]\!]$ et $j\in[\![0\,;n]\!]$, si $j+k>n$, alors $\mathbb{P}(Y=j|X=k)=0$ (car il ne peut avoir k réponses connues par l'étudiant et j réponses justes mais donnée au hasard sur un total de n questions). Si $j+k\leqslant n$, alors sachant que $(X=k)$, l'étudiant a $n-k$ questions auxquelles il doit répondre au hasard, chacune de ces questions à une chance sur quatre d'être correcte. On compte donc le nombre de succès dans la répétition de $n-k$ questions et la probabilité d'un succès est 1/4. Ainsi, $\mathbb{P}(Y=j|X=k)=\binom{n-k}{j}\left(\frac{1}{4}\right)^j\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k-j}$.

3. Soit $i\in[\![0\,;n]\!]$, alors comme $(X=k)_{k\in[\![0\,;n]\!]}$ est un système complet d'évènements :

$$(Z=i)=\bigcup_{k=0}^{n}(X=k)\cap(X+Y=i)=\bigcup_{k=0}^{n}(X=k)\cap(Y=i-k)=\bigcup_{k=0}^{i}(X=k)\cap(Y=i-k)$$

4. Comme l'union est formée d'évènements deux à deux incompatibles :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z=i) &= \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}\left((X=k)\cap(Y=i-k)\right)=\sum_{k=0}^{i}\mathbb{P}(Y=i-k|X=k)\mathbb{P}(X=k)\\
&= \sum_{k=0}^{i}\binom{n-k}{i-k}\left(\frac{1}{4}\right)^{i-k}\left(\frac{3}{4}\right)^{(n-k)-(i-k)}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\
&= \sum_{k=0}^{i}\frac{(n-k)!}{(i-k)!(n-i)!}\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{i-k}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-i}p^k(1-p)^{n-k}\\
&= \left(\frac{3}{4}\right)^{n-i}\frac{n!}{i!(n-i)!}(1-p)^{n-i}\sum_{k=0}^{i}\frac{i!}{k!(i-k)!}\left(\frac{1}{4}\right)^{i-k}p^k(1-p)^{i-k}\\
&= \left(\frac{3}{4}\right)^{n-i}\binom{n}{i}(1-p)^{n-i}\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}p^k\left(\frac{1-p}{4}\right)^{i-k}=\binom{n}{i}\left(\frac{3}{4}(1-p)\right)^{n-i}\left(p+\frac{1-p}{4}\right)^{i}\\
&= \binom{n}{i}\left(\frac{3-3p}{4}\right)^{n-i}\left(\frac{1+3p}{4}\right)^{i}
\end{aligned}$$

Ainsi, Z suit une loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1+3p}{4}$.

5. Ainsi, $\mathbb{E}(Z) = n\dfrac{1+3p}{4}$. Ainsi, $\mathbb{E}(Z) \geqslant n/2$ ssi $1+3p \geqslant 2$ ssi $p \geqslant 1/3$. Ainsi, si l'étudiant est capable de répondre avec une probabilité de une sur trois à chacune des questions et en cochant au hasard pour les autres questions, $\mathbb{E}(Z) \geqslant n/2$.

Correction de l'exercice 11.

Correction de l'exercice 12. 1. $X(\Omega) = [\![1 ; n]\!]$, car on tire un numéro entre 1 et n. De plus, $Y_i(\Omega) = [\![0 ; n]\!]$, en effet, il est possible que l'on place 0 bille dans la boîte B_i, ou au contraire que l'on toutes ainsi que tous les cas intermédiaires. Soit $a \in [\![1 ; n]\!]$, soit $b \in [\![0 ; n]\!]$. Remarquons que si $(X = a)$ est réalisé, alors on a a billes à placer, au maximum, on mettre les a billes dans la boîte B_i, ainsi, si $b > a$, $(X = a \cap Y_i = b) = \varnothing$ et $\mathbb{P}(X = a \cap Y_i = b) = 0$. Si $b \leqslant a$. Alors, $\mathbb{P}(X = a \cap Y_i = b) = \mathbb{P}(Y_i = b | X = a)\mathbb{P}(X = a)$. Comme X suit une loi uniforme sur $[\![1 ; n]\!]$, $\mathbb{P}(X = a) = \dfrac{1}{n}$. De plus, si on suppose que $(X = a)$ est réalisé, alors on tire a billes que l'on doit placer aléatoirement dans les p boites, ainsi si on considère une bille, on a une chance sur p de la placer dans la boîte B_i et cette expérience est donc répété a fois et ce, de manière indépendante, ainsi quand l'évènement $(X = a)$ est réalisé, Y_i compte le nombre de succès dans la répétition de a expériences indépendantes ayant une probabilité de $\dfrac{1}{p}$ de succès, dès lors

$$\mathbb{P}(Y_i = b | X = a) = \binom{a}{b}\left(\frac{1}{p}\right)^a\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{a-b}$$

Donc,

$$\mathbb{P}(X = a \cap Y_i = b) = \frac{1}{n}\binom{a}{b}\left(\frac{1}{p}\right)^a\left(\frac{p-1}{p}\right)^{a-b}$$

(on remarque que cette expression est encore vraie si $b > a$ car $\binom{a}{b} = 0$ par convention)

2. Soit $b \in [\![0 ; n]\!]$, comme $(X = k)$ pour $k \in [\![1 ; n]\!]$ forment un système complet d'évènements (système complet d'évènements associé aux valeurs de X), d'après la formule des probabilité totales. Soit $b \in [\![0 ; n]\!]$

$$\mathbb{P}(Y_i = k) = \sum_{a=1}^{n} \mathbb{P}(Y_i = k \cap X = a) = \sum_{a=1}^{n} \binom{a}{b}\left(\frac{1}{p}\right)^a\left(\frac{p-1}{p}\right)^{a-b}$$

3. Remarquons que $\sum_{j=1}^{p} Y_j = X$, en effet, $\sum_{j=1}^{p} Y_j$ représente la somme des billes placés dans les différentes boites et ce nombre vaut X d'après les notations du cours, or, comme l'espérance est linéaire :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{p} Y_j\right) = \sum_{j=1}^{p} \mathbb{E}(Y_j)$$

Or, remarquons que par symétrie des boîtes, les Y_j ont toutes la même loi et donc la même espérance, ainsi $\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^{p} \mathbb{E}(Y_1)$, donc $\mathbb{E}(X) = p\mathbb{E}(Y_i)$, puis, $\mathbb{E}(Y_i) = \dfrac{\mathbb{E}(X)}{p} = \dfrac{n(n+1)}{2p}$ (en effet, X suivant une loi uniforme sur $[\![1 ; n]\!]$, on connait son espérance). De même, $\sum_{j=1}^{p} \dfrac{Y_j}{X} = \dfrac{1}{X}\sum_{j=1}^{p} Y_j = \dfrac{1}{X} \times X = 1$, ainsi, par linéarité de l'espérance,

$$1 = \mathbb{E}(1) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=1}^{p} \frac{Y_j}{X}\right) = \sum_{j=1}^{p} \mathbb{E}\left(\frac{Y_j}{X}\right)$$

Encore une fois par symétrie des boîtes les $\dfrac{Y_j}{X}$ ont toutes la même loi donc la même espérance, ainsi $1 = p\mathbb{E}\left(\dfrac{Y_i}{X}\right)$, donc $\mathbb{E}\left(\dfrac{Y_i}{X}\right) = \dfrac{1}{p}$.

Correction de l'exercice 13. On sait que $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \geqslant 0$, donc $\mathbb{E}(X)^2 \leqslant \mathbb{E}(X^2)$.

Correction de l'exercice 14. Notons X la variable aléatoire qui compte le nombre de gens dans le premier train, comme chaque personne a une chance sur deux d'aller dans le premier train et que chaque personne choisit indépendant, $X \sim \mathscr{B}(1600, 1/2)$. Notons s le nombre de sièges dans le premier train (qui est égale au nombre de sièges dans le second train). Il y a X personne dans le premier train et $1600 - X$ dans le second train. Notons A l'évènement «aucun des voyageur n'est obligés de rester debout». On a alors

$$A = (X \leqslant s) \cap (1600 - X \leqslant s)$$

Or on sait que $\mathbb{E}(X) = 1600/2 = 800$, ainsi en retranchant l'espérance de X, on obtient

$$A = (X - \mathbb{E}(X) \leqslant s - 800) \cap (\mathbb{E}(X) - X \leqslant s - 800)$$

Rappelons que $|x| \leqslant y$ ssi $x \leqslant y$ et $-x \leqslant y$. On obtient donc $A = (|X - \mathbb{E}(X)| \leqslant s - 800)$. Et on cherche s tel que $\mathbb{P}(\overline{A}) \leqslant 10^{-2}$. Appliquons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev [3], on sait que

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| > s - 800) \leqslant \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant s - 800) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{(s-800)^2} = \frac{400}{(s-800)^2} = \left(\frac{20}{s-800}\right)^2$$

Et on souhaite trouver s tel que $\left(\frac{20}{s-800}\right)^2 \leqslant 10^{-2}$. C'est le cas ssi $\frac{20}{s-800} \leqslant \frac{1}{10}$ ssi $200 \leqslant s - 800$ ssi $s \geqslant 1000$. Ainsi, si chacun des deux trains contient au moins 1000 places assises, la probabilité que l'un des voyageurs soient obligés de rester debout est inférieur à 1%.

Correction de l'exercice 15. Posons $f\colon x \mapsto \frac{1}{1+x}$, définie sur $X(\Omega) = [\![0\,; n]\!]$. Ainsi, $\frac{1}{1+X} = f(X)$, en appliquant la formule de transfert :

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) = \sum_{k=0}^{n} f(k)\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k}\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Or d'après la formule du maire, $(k+1)\binom{n+1}{k+1} = (n+1)\binom{n}{k}$ [4], Ainsi, $\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$. Dès lors

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}p^k(1-p)^{n-k} \underset{j=k+1}{=} \frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n+1}{j}p^{j-1}(1-p)^{n+1-j}$$

Pour reconnaître du binôme de Newton, on aurait besoin d'un p^j et non d'un p^{j-1}, on peut multiplier et diviser par p, encore faut-il que p soit non nul, on va donc distinguer deux cas :

- Si $p = 0$, alors pour tout $j \geqslant 2$, $p^{j-1} = 0$, dans la somme il ne reste donc plus que le terme pour $j = 1$, donc [5]
$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) = \frac{1}{n+1}\frac{n+1}{1} \times 1 \times 1 = 1$$
- Si $p \neq 0$, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{1}{1+X}\right) &= \frac{1}{(n+1)p}\left(\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n+1}{j}p^j(1-p)^{n+1-j}\right)\\
&= \frac{1}{(n+1)p}\left(\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}p^j(1-p)^{n+1-j} - \binom{n+1}{0}p^0(1-p)^{n+1-0}\right)\\
&= \frac{1}{(n+1)p}\left((p+(1-p))^{n+1} - (1-p)^{n+1}\right) = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}
\end{aligned}$$

3. Pour cela, il est nécessaire de supposer que $s > 800$.
4. Passez par les factorielles si vous le préférez.
5. On pouvait aussi remarquer que si $p = 0$, alors $X = 0$ (X quasi-certaine égale à 0) , ainsi $Y = 1$ et donc $\mathbb{E}(Y) = 1$.

Correction de l'exercice 16. On sait que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k)$. Soit $k \in [\![0\,;n]\!]$. Comme X ne prend que des valeurs entières, on a $(X > k-1) = (X = k) \cup (X > k)$. Et cette union est disjointe, car X ne peut pas être à la fois égale à k et strictement plus grand que k. Ainsi, $\mathbb{P}(X > k-1) = \mathbb{P}(X = k) + \mathbb{P}(X > k)$. Donc $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k)$. Dès lors,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{n} k\left(\mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X > k-1) - \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X > k) \\
&= \sum_{j=-1}^{n-1} (j+1)\mathbb{P}(X > j) - \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X > k) \\
&= (-1+1)\mathbb{P}(X > -1) + \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\mathbb{P}(X > k) - k\mathbb{P}(X > k) + (n-1)\mathbb{P}(X > n)
\end{aligned}$$

Or $\mathbb{P}(X > n) = 0$. On a donc prouvé que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X > k)$.