Loi de variables aléatoires discrètes

Exercice 1 ($\star$ Rai)**.** Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{a}{n(n+1)}$

1. Déterminer la valeur de a.
2. Calculer la fonction de répartition de X et tracer-là
3. Écrire, sous la forme d'une somme, la probabilité que X soit impair.
4. X admet-elle une espérance ?
5. $\star\star$ Calculer la probabilité que X soit impaire, on pourra utiliser qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Exercice 2 ($\star$ Rai)**.** Soit X une variable aléatoire dont la fonction de répartition est F_X, telle que pour tout $t < -2$, $F_X(t) = 0$, pour $t \in [-2\,;2\,[$, $F_X(t) = \dfrac{1}{3}$, pour tout $t \in [\,2\,;3\,[$, $F_X(t) = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $t \geqslant 3$, $F_X(t) = 1$. Déterminer la loi de X.

Exercice 3 ($\star$ Rai)**.** Léa lance un dé une infinité de fois, on note X le numéro du lancer amenant le premier 1. Si X est pair, Léa gagne X euros, sinon, Léa perd X euros. On note G son gain algébrique. Déterminer la loi de X, celle de G, puis montrer que G admet une espérance et calculer-là.

Exercice 4 ($\star$ Cal, Rep)**.**

1. Si $X \sim \mathscr{B}(3, 1/2)$, tracer la courbe de F_X sa fonction de répartition.
2. Idem pour $X \sim \mathscr{G}(1/2)$.

Exercice 5 (𝄞$\star$ Cal)**.** Si $X \sim \mathscr{G}(p)$ et $Y \sim \mathscr{G}(q)$ avec $(p, q) \in \,]\,0\,;1\,[^2$, avec X et Y indépendantes.

1. Déterminer $\mathbb{P}(X = Y)$.
2. Déterminer $\mathbb{P}(X < Y)$.

Exercice 6 ($\star$ Rai)**.** Soit $p \in \,]\,0\,;1\,[$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont F_X est la fonction de répartition, on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_X(n) = 1 - (1-p)^n$, déterminer la loi de X.

Exercice 7 ($\star\star$ Rai)**.** Considérons une pièce dont la probabilité d'obtenir pile est $p \in \,]\,0\,;1\,[$. Les lances sont indépendants. On lance la pièce autant de fois que nécessaire pour obtenir deux piles. Et on note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir ces deux piles.

1. Déterminer $\mathbb{P}(X = 0)$, $\mathbb{P}(X = 1)$, $\mathbb{P}(X = 2)$ et $\mathbb{P}(X = 3)$.
2. Plus généralement, déterminer la loi de X.
3. Démontrer que X admet une espérance et calculer-là.

Exercice 8 ($\star\star$ Rai)**.** Soit X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda \geqslant 0$ et Y suivant une loi de Poisson de paramètre $\mu \geqslant 0$, on suppose que X et Y sont indépendantes, déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 9 ($\star$ Rai)**.** Valentin a X euros dans son portefeuille où X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{p^n}{(1+p)^{n+1}}$ avec $p > 0$.

1. Démontrer que l'on a bien défini ainsi une variable aléatoire.
2. Démontrer que X admet une espérance et une variance à calculer.
3. Valentin veut aller au cinéma, la place coûte $M \in \mathbb{N}^*$ euros, calculer la probabilité que Valentin est assez d'argent pour s'acheter son billet.

Exercice 10 ($\star\star\star$ Rec)**.** Soit X une variable aléatoires discrète et $m \in \mathbb{R}$, on dit que m est une médiane de X si $\mathbb{P}(X \leqslant m) \geqslant \dfrac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X \geqslant m) \geqslant \dfrac{1}{2}$.

1. Démontrer que si $X \sim \mathscr{B}(1/2)$, alors X admet plusieurs médianes.
2. Si X est quelconque, montrer que X admet au moins une médiane (on pourra admettre que la fonction de répartition est toujours continue à droite ainsi que l'exercice 11 du TD2).

Exercice 11 ($\star$ Rai)**.** On dispose d'une infinité de boites numérotées par un numéro appartenant à $\mathbb{N}^*$. La boite numéro n contient n boules numérotés. On choisit une boite et on note X son numéro, on suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{1}{2^n}$. Puis une fois que l'on a fait ce choix on tire une boule dans cette boîte et on note Y son numéro.

1. Démontrer que X est bien une variable aléatoire.
2. Déterminer la loi de Y.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Espérance, variance

Exercice 12 ($\star\star$ Cal)**.** Soit $\mathscr{P}(\lambda)$ avec $\lambda \geqslant 0$. Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{1+X}\right)$.

Exercice 13 ($\star\star$ Rai, Cal)**.** Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, démontrer que $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X > k) = (n+1)\mathbb{P}(X > n) + \sum_{j=1}^{n} j\mathbb{P}(X = j)$
2. Démontrer que $(n+1)\mathbb{P}(X > n) \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)$
3. En considérant la somme partielle et la somme de la série $\sum k\mathbb{P}(X = k)$, démontrer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
4. Conclure que $\sum \mathbb{P}(X > n)$ converge et $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > n)$

Exercice 14 ($\star$ Rai)**.** Soit X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, on pose $Y = 4\left\lfloor \frac{X}{2} \right\rfloor - 2X + 1$.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Calculer l'espérance et la variance de Y.

Exercice 15 ($\star\star$ Cal ©)**.**
1. Soit $t \in [\,0\,;1\,[$, calculer $\sum_{k=0}^{n} t^k$
2. Soit $x \in \,]\,0\,;1\,[$, intégrer sur $[\,0\,;x\,]$, la relation obtenue à la question précédente.
3. Démontrer que $\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
4. Conclure que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge et que sa somme vaut $-\ln(1-x)$.
5. Soit $X \sim \mathscr{G}(p)$ avec $p \in \,]\,0\,;1\,[$, montrer que $\frac{1}{X}$ admet une espérance et calculer-là.

Exercice 16 ($\star$ Rai)**.**
1. Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3}$ converge, on note S sa somme.
2. Justifier qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = \frac{a}{n^3}$.
3. Montrer que X admet une espérance et déterminer-là.
4. Est-ce que X admet une variance ?

Exercice 17 ($\star$ Rai)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et X suivant une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{n}$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant n^2) \leqslant \frac{1}{n}$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(|X - n| \geqslant n) \leqslant 1 - \frac{1}{n}$.
3. Montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant 2n) \leqslant 1 - \frac{1}{n}$.

Exercice 18 ($\star\star\star$ Rai ©)**.** Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi et prenant des valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et admettant une espérance telle que $\frac{1}{X}$ et $\frac{1}{Y}$ admettent des espérances.

1. Démontrer que $\frac{X}{Y}$ admet une espérance.
2. Démontrer que $\mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right) \geqslant 1$.

Exercice 19 ($\star\star$ Rai ©)**.** Soit X une variable aléatoire, on dit que X admet un moment d'ordre k si X^k admet une espérance.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x \leqslant 1 + x^2$
2. En déduire que si X admet un moment d'ordre 2, alors X admet un moment d'ordre 1.
3. De manière générale, si X admet un moment d'ordre p pour $p \in \mathbb{N}^*$, alors il admet un moment d'ordre $q \in \mathbb{N}^*$ si $q \leqslant p$.