Exercice 1 : pot pourri de questions de sup

1. $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3)$, ainsi, $\sin(\ln(1+x)) = \sin\left(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3)\right) = \sin(u)$ avec $u = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3)$, alors :
   - $u^2 = x^2 - x^3 + \mathcal{O}(x^3)$
   - $u^3 = x^3 + \mathcal{O}(x^3)$,
   - Comme $u^3 \sim x^3$, on $\mathcal{O}(u^3) = \mathcal{O}(x^3)$.

   Dès lors :
$$\begin{aligned}\sin(\ln(1+x)) = \sin(u) &= u - \frac{u^3}{6} + \mathcal{O}(u^3)\\ &= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3)\right) - \frac{x^3 + \mathcal{O}(x^3)}{6} + \mathcal{O}(x^3)\\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^3)\end{aligned}$$

2. On a une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants dont l'équation caractéristique est $r^2+3r-10 = (r+5)(r-2) = 0$. Ainsi, il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = A(-5)^n + B2^n$. Pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient le système suivant que l'on résout :
$$\begin{cases} A+B &= 1\\ -5A+2B &= 1\end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2+5L_1}{\iff} \begin{cases} A+B &= 1\\ 7B &= 6\end{cases} \iff \begin{cases} B &= \dfrac{6}{7}\\ A &= \dfrac{1}{7}\end{cases}$$
   Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(-5)^n}{7} + \dfrac{6\times 2^n}{7}$.
3. En posant le changement d'indice $j = k+2$, on obtient, en reconnaissant la formule du binôme de Newton :
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-2}\binom{n}{k+2}(-1)^k 2^{k+3} &= \sum_{j=3}^{n}\binom{n}{j}(-1)^{j-2}2^{j+1}\\ &= 2\sum_{j=3}^{n}\binom{n}{j}(-1)^j 2^j\\ &= 2\left(-1 + 2n - \frac{n(n-1)}{2}4 + \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-2)^j\right)\\ &= 2\left(-1 + 4n - 2n^2 + \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(-2)^j 1^{n-j}\right)\\ &= 2\left(-1+4n-2n^2+(1-2)^n\right) = -2+8n-4n^2+2(-1)^n\end{aligned}$$
4. On pose $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^{nx} + \arctan(x)$, par somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = n\mathrm{e}^{nx} + \dfrac{1}{1+x^2} > 0$ (par somme d'un terme positif ou nul et d'un terme strictement positif). Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et continue. Dès lors, d'après le théorème de la bijection strictement monotone, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\,;\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$.
   - Si $n = 0$, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1 + \dfrac{\pi}{2}$ et $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 1 - \dfrac{\pi}{2}$ et donc $f(\mathbb{R}) = \left]1-\dfrac{\pi}{2}\,;1+\dfrac{\pi}{2}\right[$
   - Si $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\dfrac{\pi}{2}$ et donc $f(\mathbb{R}) = \left]-\dfrac{\pi}{2}\,;+\infty\right[$.

   Dans tous les cas, $2 \in f(\mathbb{R})$, ainsi, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{e}^{nx} + \arctan(x) = 2$.
5. D'après la question précédente, $-3 \notin f(\mathbb{R})$, ainsi l'équation $f(x) = -3$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
6. On pose $g\colon x \mapsto \cos(x) - x$, alors $g(0) = 1$ et $g(\pi/2) = -\pi/2$, ainsi, $g(\pi/2) \leqslant 0 \leqslant g(0)$, de plus, g est continue sur $[\,0\,;\pi/2\,]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [\,0\,;\pi/2\,]$ tel que $g(x) = 0$ et donc $\cos(x) = x$.

Exercice 2 : des séries à binge-watcher

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, en reconnaissant une somme télescopique :
$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1)-\ln(k)) = \ln(n+1) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$
Ainsi, $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge.
2. Remarquons que le discriminant de $2X^2-nX+2$ est strictement négatif, ainsi ce polynôme du second degré est strictement positif. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3n^2-n+2 \geqslant n^2$, par passage à l'inverse, $0 < \frac{1}{3n^2-n+2} \leqslant \frac{1}{n^2}$. Or, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, par théorème de comparaison $\sum \frac{1}{3n^2-n+2}$ converge.
3. Par croissance comparée, $n^5+\ln(n) \sim n^5$ et $2n^7+n(-1)^n \sim 2n^7$, par quotient d'équivalent
$$\frac{n^5+\ln(n)}{2n^7+n(-1)^n} \sim \frac{n^5}{2n^7} = \frac{1}{2n^2}$$
Or, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, par linéarité, $\sum \frac{1}{2n^2}$ converge, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \frac{n^5+\ln(n)}{2n^7+n(-1)^n}$ converge.
4. Utilisons le développement limité de cos en 0 à l'ordre 2 : $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$, ainsi, $\cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, ainsi, $\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1 = -\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{2n^2}$. En multipliant par -1, on obtient que $1-\cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n^2}$. Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum \left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ converge. Par linéarité, $\sum \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)$ converge.

Exercice 3 : un problème à deux balles

1.
```python
import matplotlib.pyplot as plt

def fn(x,n):
    if x >= 0 and x < 1/n:
        return n*n*x
    if x >= 1/n and x < 2/n:
        return 2*n-n*n*x
    if x >= 2/n and x < 1:
        return 0

def Graphe(n):
    A = []
    O = []
    h = 1/1000
    for i in range(0,1001):
        A.append(i*h)
        O.append(fn(i*h,n))
    plt.figure()
    plt.plot(A,O)
    plt.title("Graphe de $f_"+str(n)+"$")
    plt.show()

Graphe(3)
Graphe(4)
Graphe(5)
```

2. En décomposant par Chasles :

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2x\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} 2n - n^2x\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{2}{n}}^1 0\,\mathrm{d}x = \left[\frac{n^2x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{n}} + \left[2nx - \frac{n^2x^2}{2}\right]_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} + 0 = 1$$

3. Si $x = 0$, alors $f_n(x) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Si $x \in \left]0\,;1\right]$, alors pour $n > \frac{2}{x}$, on a $x > \frac{2}{n}$ et donc $f_n(x) = 0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Dans tous les cas, $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

4. Ainsi, $\int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0$ tandis que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$. Ainsi, on peut en conclure que

$$\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

5. Considérons f et $x \mapsto \frac{-2}{2n+1}\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)$, ce sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ dont les dérivées sont respectivement f' et $x \mapsto \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)$, ainsi par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\,\mathrm{d}x &= \left[f(x)\frac{-2}{2n+1}\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\right]_0^\pi - \int_0^\pi f'(x)\left(-\frac{2}{2n+1}\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\right)\,\mathrm{d}x\\ &= 0 + \frac{2f(0)}{2n+1} + \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi f'(x)\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

- $\frac{2f(0)}{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
- D'après l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\left|\frac{2}{2n+1}\int_0^\pi f'(x)\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi \left|f'(x)\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\,\mathrm{d}x\right|\\ &\leqslant \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi |f'(x)| \times \left|\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\right|\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi |f'(x)|\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

  Ainsi,

$$\frac{2}{2n+1}\int_0^\pi |f'(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2n+1}\int_0^\pi f'(x)\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi |f'(x)|\,\mathrm{d}x$$

  Comme, la majoration et la minoration obtenues tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$, d'après le théorème d'encadrement, $\frac{2}{2n+1}\int_0^\pi f'(x)\cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Par somme de deux suites de limite nulle, on peut en conclure que $\int_0^\pi f(x)\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

6. Soit $x \in \left]0\,;\pi\right]$, en utilisant la relation $\cos(x) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}\right)$, puis la formule de Moivre puis la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}$ avec $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} \neq 1$, on obtient :

$$\begin{aligned}S_n(x) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}) = \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}\right) = \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} \times \frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nx}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x}}\right)\\ &= \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} \times \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{nx}{2}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{x}{2}}} \times \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{nx}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{nx}{2}}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{x}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{x}{2}}}\right) = \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{n-1}{2}x} \times \frac{-2\mathrm{i}\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{-2\mathrm{i}\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)\\ &= \frac{1}{2} + \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{n+1}{2}x} \times \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{n+1}{2}x}\right)\\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right) = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\end{aligned}$$

Or, pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $\begin{cases}\sin(a+b) & =\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)\\ \sin(a-b) & =\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)\end{cases}$. Par somme, on obtient

$$\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\sin(a)\cos(b)$$

Avec $a=\dfrac{nx}{2}$ et $b=\dfrac{n+1}{2}x$, il en découle que

$$\sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)+\sin\left(-\frac{x}{2}\right)=2\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)$$

Par imparité du sin et en faisant passer $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$ de l'autre côté de l'équation, on en conclut finalement que

$$S_n(x)=\frac{\sin\left(\dfrac{2n+1}{2}x\right)}{2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}$$

7. Les fonction $x\mapsto ax^2+bx$ et $x\mapsto\dfrac{1}{n}\sin(nx)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;\pi\,]$ de dérivées respectives, $x\mapsto 2ax+b$ et $x\mapsto\cos(nx)$, ainsi par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi(ax^2+bx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x&=\left[(ax^2+b)\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^\pi-\int_0^\pi(2ax+b)\frac{1}{n}\sin(nx)\,\mathrm{d}x\\&=0-\frac{1}{n}\int_0^\pi(2ax+b)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Remarquons que $x\mapsto 2ax+b$ et $x\mapsto\dfrac{-\cos(nx)}{n}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;\pi\,]$ de dérivées respectives $x\mapsto 2a$ et $x\mapsto\sin(nx)$, ainsi par une nouvelle intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi(ax^2+bx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x&=-\frac{1}{n}\left(\left[-(2ax+b)\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi-\int_0^\pi 2a\frac{-\cos(nx)}{n}\,\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{n^2}\left((2a\pi+b)(-1)^n-b\right)+0\end{aligned}$$

8. On souhaite donc trouver a et b tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(2a\pi+b)(-1)^n-b=1$. Il suffit donc de choisir a et b tel que $(2a\pi+b)=0$ et $b=-1$. On prend donc $b=-1$ et $a=\dfrac{1}{2\pi}$

9. Prenons donc $b=-1$ et $a=\dfrac{1}{2\pi}$, alors, en utilisant la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi(ax^2+bx)S_n(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^\pi(ax^2+bx)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=0}^n\cos(kx)\right)\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^\pi(ax^2+bx)\times\frac{1}{2}+\sum_{k=0}^n(ax^2+bx)\cos(kx)\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^\pi(ax^2+bx)\,\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^n\int_0^\pi(ax^2+bx)\cos(kx)\,\mathrm{d}x\\&=\left[\frac{ax^3}{6}+\frac{bx^2}{4}\right]_0^\pi+\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^2}\\&=\frac{a\pi^3}{6}+\frac{b\pi^2}{4}+S_n=\frac{\pi^2}{12}-\frac{\pi^2}{4}+S_n=-\frac{\pi^2}{6}+S_n\end{aligned}$$

10. On effectue le développement limité de sin à l'ordre 2 : $\sin(x)=x+\mathcal{O}(x^2)$:

$$\begin{aligned}f(x)=\frac{ax^2+bx}{2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}&=\frac{ax^2+bx}{2\left(\dfrac{x}{2}+\mathcal{O}(x^2)\right)}\\&=\frac{ax+b}{1+\mathcal{O}(x)}\end{aligned}$$

On pose $h = \mathcal{o}(x)$, ainsi $\mathcal{o}(h) = \mathcal{o}(\mathcal{o}(x)) = \mathcal{o}(x)$, ainsi, en utilisant le développement limité de $h \mapsto \dfrac{1}{1+h} = 1 - h + \mathcal{o}(h)$, on obtient :

$$f(x) = (ax+b)(1-h+\mathcal{o}(h)) = (ax+b)(1-\mathcal{o}(x)+\mathcal{o}(x)) = (ax+b)(1+\mathcal{o}(x)) = b + ax + \mathcal{o}(x)$$

Ainsi, f admet un développement limité à l'ordre 1, ainsi f est prolongeable par continuité, en notant $\tilde{f}$ son prolongement par continuité, ce prolongement est dérivable en 0, $\tilde{f}(0) = b$ et $\tilde{f}'(0) = a$

11. Comme $\tilde{f}$ est le quotient de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]\,0\,;\pi\,]$, $\tilde{f}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;\pi\,]$. De plus, $\tilde{f}$ est dérivable en 0, il reste donc à savoir si $\tilde{f}'$ est continue en 0, autrement dit, on cherche si $\tilde{f}'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \tilde{f}'(0) = a$. Pour cela, pour tout $x \in\,]\,0\,;\pi\,]$,

$$f'(x) = \frac{(2ax+b)2\sin(x/2) - (ax^2+bx)\cos(x/2)}{4\sin^2(x/2)}$$

Or, $4\sin^2(x/2) \sim 4(x/2)^2 = x^2$ et

$$\begin{aligned}(2ax+b)2\sin(x/2) - (ax^2+bx)\cos(x/2) &= (2ax+b)2(x/2+\mathcal{o}(x^2)) - (ax^2+bx)(1-x^2/8+\mathcal{o}(x^2)) \\ &= ax^2 + \mathcal{o}(x^2) \sim ax^2\end{aligned}$$

Ainsi, par quotient d'équivalents, $\tilde{f}'(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{ax^2}{x^2} = a$, ainsi, $\tilde{f}'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} a = \tilde{f}'(0)$, ainsi, $\tilde{f}'$ est continue en 0 et donc $\tilde{f}$ est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,0\,;\pi\,]$.

12. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, remarquons que pour tout $x \in [\,0\,;\pi\,]$, $(ax^2+bx)S_n(x) = \tilde{f}(x)\sin\left(\dfrac{2n+1}{2}x\right)$ (d'après l'expression de $\tilde{f}(x) = f(x)$ et de $S_n(x)$ si $x > 0$ et par l'égalité $0 = 0$ si $x = 0$), ainsi d'après la question 9 :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \frac{\pi^2}{6} = \int_0^\pi (ax^2+bx)S_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \tilde{f}(x) \times \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(en appliquant le résultat de la question 5 à $\tilde{f}$ qui est bien de classe $\mathscr{C}^1$ d'après la question précédente), on en déduit que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge (ce qu'on savait déjà) et que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$ (ce qu'on avait admis).