Chapitre 4

Couples de variables aléatoires

Table des matières

1 Couple de variables aléatoires réelles discrètes

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles définies sur Ω muni de la probabilité $\mathbb{P}$ définie sur la tribu $\mathscr{T}$.

Définition d'une variable aléatoire couple

On définit la **variable aléatoire couple** de X et de Y comme la fonction : $(X,Y)\colon \begin{cases} \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \omega \longmapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{cases}$

C'est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Définition de la loi conjointe

La **loi conjointe** de X et Y est la loi du couple (X,Y) : $\begin{cases} X(\Omega)\times Y(\Omega) \longrightarrow [\,0\,;1\,] \\ \quad (x,y) \quad\longmapsto \mathbb{P}((X=x)\cap(Y=y)) \end{cases}$.

Remarques 1.
- On note $\mathbb{P}(X=x, Y=y) = \mathbb{P}((X=x)\cap(Y=y))$.
- Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{P}(X=x,Y=y) = \mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)$.
- X et Y sont des variables aléatoires finies telles que $p = |X(\Omega)|$ et $q = |Y(\Omega)|$ soient petits, alors on peut consigner la loi conjointe dans un tableau à p lignes et q colonnes.
- Comme pour les VA réelles, les évènements $(X = x \cap Y = y)$, pour $(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)$, forment un système complet d'évènements : si X et Y sont finies, on a ainsi, $\mathbb{P}(A) = \sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(A\cap(X=x)\cap(Y=y))$ et $\sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(X=x,Y=y) = 1$ (l'hypothèse que X et Y sont finies permet d'avoir des sommes doubles finies et non des séries doubles qui ne sont pas au programme de BCPST2).

Exemple 1. On lance deux dés équilibrés et de façon indépendante et on note X le plus grand nombre obtenu et Y le plus petit, donner la loi conjointe de (X,Y).

Attention à l'univers image

Ce n'est pas parce que x est une issue de X et que y est une issue de Y que (x,y) est une issue de (X,Y) : $(X,Y)(\Omega)\subset X(\Omega)\times Y(\Omega)$ mais il n'y a pas forcément égalité.

Définition de la loi marginale

On appelle **première loi marginale** de (X,Y) la loi de X, **seconde loi marginale** de (X,Y) la loi de Y.

Proposition n° 1 : calcul des lois marginales en fonction de la loi conjointe

Soit (X,Y) un couple de VA, alors la première loi marginale est donnée par (idem pour la seconde) :

$$\forall x\in X(\Omega) \qquad \mathbb{P}(X=x) = \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathbb{P}((X=x)\cap(Y=y))$$

Remarque 2. Étant donnée la loi conjointe, on peut calculer les lois marginales, par contre, les lois marginales seules ne suffisent pas à retrouver la loi conjointe.

Exemples 2.
- Calculer la loi marginale de X dans l'exemple 1.
- Donner deux exemples de variables aléatoires (X,Y) tels que les lois marginales soient des lois uniformes sur $\{-1;1\}$ tels que les deux couples n'aient pas la même loi.

Définition loi conditionnelle de X sachant un évènement A

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω et A un évènement de Ω tel que $\mathbb{P}(A) > 0$. On appelle **loi conditionnelle** de X sachant A l'application $x\mapsto \mathbb{P}(X=x|A) = \dfrac{\mathbb{P}((X=x)\cap A)}{\mathbb{P}(A)}$ définie sur $X(\Omega)$ et à valeurs dans $[\,0\,;1\,]$.

Exemples 3.

- En conservant l'exemple 1, calculer la loi de X sachant l'évènement $(Y = 3)$.
- Soit une pièce équilibrée qu'on lance une infinité de fois, on note X le numéro du premier lancer où on a obtenu pile. Si k est le numéro du lancer, on place k billes numérotés de 1 à k dans une urne et on tire une bille de cette urne et on note Y le numéro obtenu. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $(X = 4)$ puis la loi de Y.

2 Exemples de variable aléatoire de la forme $u(X, Y)$

Comment calculer la loi du maximum ? du minimum ?

Si X et Y sont indépendantes et $Z = \max(X, Y)$, alors $(Z \leqslant x) = (X \leqslant x) \cap (Y \leqslant x)$, puis par indépendance, $\mathbb{P}(Z \leqslant x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)\mathbb{P}(Y \leqslant x)$, donc $F_Z(x) = F_X(x)F_Y(x)$, ainsi connaissant les fonctions de répartition de X et de Y, on connaît celle de Z, puis on retrouve la loi de Z.
Si $W = \min(X, Y)$, alors $(W \geqslant w) = (X \geqslant w) \cap (Y \geqslant w)$ et on procède de même.

Calcul de la loi du maximum de variables aléatoires uniformes

Soit X et Y deux variables indépendantes suivant une loi uniforme sur $[\![1\,;n]\!]$. Déterminer la loi de $\max(X, Y)$ et de $\min(X, Y)$. Généraliser au cas de p variables aléatoires indépendantes et suivant une loi uniforme sur $[\![1\,;n]\!]$.

Comment calculer la loi de la somme deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$?

Si X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $(X+Y=n) = \bigcup\limits_{k=0}^{n} ((X = k) \cap (Y = n-k))$. Puis, comme les évènements $(X = k) \cap (Y = n-k)$. pour $k \in [\![1\,;n]\!]$, sont deux à deux incompatibles :

$$\mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X = k,\ Y = n-k)$$

Proposition n° 2 : loi de la somme de lois de Poisson

1. Si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathscr{P}(\mu)$ avec X et Y indépendantes, alors $X + Y \sim \mathscr{P}(\lambda + \mu)$
2. Si pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $X_i \sim \mathscr{P}(\lambda_i)$ avec $X_1, X_2, \dots, X_n$ indépendantes, alors $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k \sim \mathscr{P}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k\right)$.

Exemples 4.

1. Soit $X \sim \mathscr{G}(p)$ et $Y \sim \mathscr{G}(q)$ avec $(p, q) \in]\,0\,;1\,[^2$ avec X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Calculer la loi de $X + Y$ puis celle de $X - Y$.
2. Soit $X \sim \mathscr{U}([\![1\,;6]\!])$, $Y \sim \mathscr{U}([\![1\,;6]\!])$ X et Y indépendantes. On pose $Z = \max(X, Y)$. Les variables Z et X sont-elles indépendantes ? Déterminer la loi de $Z + X$.

Théorème n° 1 : formule de transfert pour l'espérance de $u(X, Y)$ *(admis)*

Si X et Y sont deux VA discrètes finies avec $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_p\}$, alors :

$$\mathbb{E}(u(X, Y)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} u(x, y)\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} u(x_i, y_j)\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$$

Exemple 5. Soit X et Y deux variables aléatoires telles que pour tout $(i, j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \begin{cases} \dfrac{1}{ni} & \text{si} \quad 1 \leqslant j \leqslant i \\ 0 & \text{si} \quad i < j \leqslant n \end{cases}$.

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. X et Y sont elles-indépendantes ?
3. Calculer $\mathbb{E}(XY)$, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$.

3 Covariance

Définition de la covariance de deux variables aléatoires

Soient X et Y deux VA discrètes réelles. Si X, Y et $(X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))$ admettent chacune une espérance, alors on définit la **covariance** de X et Y par
$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y)))$$
On dit que X et Y sont **décorrélées** si $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$.

Proposition n° 3 : formule de König-Huygens pour la covariance

Si X et Y sont deux VA réelles, alors la covariance de X et de Y est définie si et seulement si X, Y, XY ont des espérances et dans ce cas :
$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Remarques 3.

- Si X admet une variance, alors $\mathbb{V}(X)=\mathrm{Cov}(X,X)$.
- Si X et Y admettent des variances, alors la covariance de X et de Y est bien définie.
- Si X et Y sont finies, on peut calculer la covariance de X et de Y en utilisant la formule de transfert : $\mathrm{Cov}(X,Y)=\sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{y\in Y(\Omega)}(x-\mathbb{E}(X))(y-\mathbb{E}(Y))\mathbb{P}(X=x,Y=y)$
- Si X et Y sont indépendantes et admettent des espérances, alors (X,Y) admet une covariance et $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$.

Attention la réciproque est fausse

Il est possible d'être décorrélées sans être indépendantes.

Exemple 6. Si $X\sim\mathscr{U}(\{-1,0,1\})$, alors $\mathrm{Cov}(X,X^2)=0$ alors que X et X^2 ne sont pas indépendantes.

Proposition n° 4 : variance de la somme de variables aléatoires

1. Si X et Y admettent des variances, alors $X+Y$ admet une variance et $\mathbb{V}(X+Y)=\mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)$
2. De plus, X et Y sont décorrélées (ou indépendantes), alors $\mathbb{V}(X+Y)=\mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)$
3. Si $X_1,\dots,X_n$ admettent des variances, alors $\sum_{i=1}^{n}X_i$ admet une variance et
$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(X_i)+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$$
4. De plus, si $X_1,\dots,X_n$ sont deux à deux décorrélées, alors $\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{V}(X_i)$

Exemple 7. Si $X\sim\mathscr{B}(n,p)$, alors $\mathbb{V}(X)=np(1-p)$