Correction de l'exercice 1.

Correction de l'exercice 2.

Correction de l'exercice 3.

Correction de l'exercice 4.

Correction de l'exercice 5.

Correction de l'exercice 6.

Correction de l'exercice 7.

Correction de l'exercice 8.

Correction de l'exercice 9.

Correction de l'exercice 10.

Correction de l'exercice 11.

Correction de l'exercice 12.

Correction de l'exercice 13.

Correction de l'exercice 14.

Correction de l'exercice 15.

1. Soit $t \in [\,0\,;1\,[$, alors par somme des termes d'une suite géométrique contenant $n+1$ termes et de raison $t \neq 1$, $\sum\limits_{k=0}^{n} t^k = \dfrac{1-t^{n+1}}{1-t}$.

2. On intègre sur $[\,0\,;x\,]$, la relation précédente, ainsi : $\displaystyle\int_0^x \sum_{k=0}^{n} t^k \,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1-t^{n+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t$. Par linéarité de l'intégrale, on obtient $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\int_0^x t^k\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1-t} - \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t$. Ainsi,
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t$$

3. Soit $t \in [\,0\,;x\,]$, alors $t \leqslant x$, donc $-t \geqslant -x$ donc $1-t \geqslant 1-x > 0$, par passage à l'inverse (fonction décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$), $\dfrac{1}{1-t} \leqslant \dfrac{1}{1-x}$, comme $t^{n+1} \geqslant 0$, il vient $0 \leqslant \dfrac{t^{n+1}}{1-t} \leqslant \dfrac{t^{n+1}}{1-x}$, par croissance de l'intégrale, il vient
$$0 = \int_0^x 0\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-x}\,\mathrm{d}t = \frac{x^{n+2}}{(n+2)(1-x)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
D'après le théorème d'encadrement, $\displaystyle\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

4. Ainsi, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \frac{x^j}{j} \underset{k=j-1}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} -\ln(1-x)$, par extraction, cela prouve que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n}$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

5. Pour appliquer la formule de transfert, on vérifie que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}\mathbb{P}(X = n)$ converge absolument. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n}\mathbb{P}(X = n) = \frac{p}{n}(1-p)^{n-1}$. Or, $\sum \frac{(1-p)^n}{n}$ converge d'après ce qui précède, donc par linéarité $\sum \frac{p}{n}(1-p)^{n-1}$ converge (et même absolument car c'est une SATP), et d'après la formule de transfert $\frac{1}{X}$ admet une espérance :

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\mathbb{P}(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p}{n}(1-p)^{n-1} = \frac{p}{1-p}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-p)^n}{n} = -\frac{p}{1-p}\ln(1-(1-p)) = \frac{-p\ln(p)}{1-p}$$

Correction de l'exercice 16.

Correction de l'exercice 17.

Correction de l'exercice 18. 1. Remarquons que $X = f(X)$ et $\frac{1}{Y} = g(Y)$ avec $f\colon x \mapsto x$ et $g\colon x \mapsto \frac{1}{x}$, comme X et Y sont indépendantes, $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes d'après le lemme des coalitions. De plus, X et $\frac{1}{Y}$ admettent des espérances donc leur produit aussi d'après le résultat de cours sur le produit de variables aléatoires indépendantes et admettant des espérances. Ainsi, $\frac{X}{Y}$ admet une espérance.

2. Posons $f\colon x \mapsto x + \frac{1}{x}$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$, ainsi :
   - f' est positive sur $[\,1\,;+\infty\,[$, et donc f est croissante sur $[\,1\,;+\infty\,[$. Par conséquent, pour $x \geqslant 1$, $f(x) \geqslant f(1) = 2$.
   - De même, f' est négative sur $]\,0\,;1\,]$ et donc f est décroissante sur $]\,0\,;1\,]$. Par conséquent, pour $x \in\,]\,0\,;1\,]$, $f(x) \geqslant f(1) = 2$.

   Ainsi, pour tout $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$. Dès lors, $\frac{X}{Y} + \frac{Y}{X} \geqslant 2$, par croissance de l'espérance,

$$\mathbb{E}\left(\frac{X}{Y} + \frac{Y}{X}\right) \geqslant \mathbb{E}(2) = 2$$

   Par linéarité de l'espérance, on obtient $\mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right) + \mathbb{E}\left(\frac{Y}{X}\right) \geqslant 2$. Par indépendance, $\mathbb{E}\left(\frac{Y}{X}\right) = \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right)$, or comme X et Y ont même loi, $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X)$. De plus, $\frac{1}{X}$ et $\frac{1}{Y}$ ont aussi même loi, en effet, ce sont des variables aléatoires dont l'univers image est dans $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall a > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\frac{1}{X} = a\right) = \mathbb{P}\left(X = \frac{1}{a}\right) = \mathbb{P}\left(Y = \frac{1}{a}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{Y} = a\right)$$

   En particulier, $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{Y}\right)$, on obtient que

$$\mathbb{E}\left(\frac{Y}{X}\right) = \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}\left(\frac{1}{Y}\right) = \mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right)$$

   Par conséquent, $\mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right) + \mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right) \geqslant 2$, en simplifiant par 2, $\mathbb{E}\left(\frac{X}{Y}\right) \geqslant 1$.

Correction de l'exercice 19. 1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
   - Si $x \geqslant 1$, alors en multipliant par $x > 0$ il vient $x^2 \geqslant x$ et donc $x \leqslant x^2 + 1$.
   - si $x \leqslant 1$, alors $x \leqslant 1 + x^2$.

   Dans tous les cas, on a montré que $x \leqslant 1 + x^2$.

2. Supposons que X admette un moment d'ordre 2, en appliquant ce qui précède à $|X|$, il vient

$$|X| \leqslant 1 + |X|^2 = 1 + X^2$$

Or, 1 et X^2 admettent des espérances donc $1 + X^2$ aussi, par majoration, $|X|$ admet aussi une espérance et donc X aussi (car une série absolument convergente converge).

3. Fixons $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ avec $q \leqslant p$, remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x^q \leqslant 1 + x^p$. En effet, soit $x \in \mathbb{R}_+$:
   - Si $x \in [\,0\,;1\,]$, alors $x \leqslant 1$ donc $x^q \leqslant 1 \leqslant 1 + x^p$.
   - Si $x \geqslant 1$, alors $x^{p-q} \geqslant 1$ et en multipliant par $x^q \geqslant 0$, il vient $x^p \geqslant x^q$, puis $x^q \leqslant 1 + x^p$.

   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x^q \leqslant 1 + x^p$. En appliquant ce qui précède à $|X|$, il vient $|X|^q \leqslant 1 + |X|^p$, or $|X|^p$ admet une espérance (par hypothèse) et 1 aussi, par somme $1 + |X|^p$ admet donc une espérance. Par majoration, $|X|^q$ aussi, ainsi X^q admet une espérance et donc X admet un moment d'ordre q.