

DM2 : à rendre le lundi 10 Novembre 2025

Vous pouvez rendre vos simulations informatiques sur Capytale en utilisant ce lien : <https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/56ba-7756933>.

Le problème de la collectionneuse

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. Pour i et j deux entiers naturels tels que $i \leq j$, $\llbracket i; j \rrbracket$ désigne l'ensemble des entiers k tels que $i \leq k \leq j$. On rappelle que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge et que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Partie I : Étude des nombres harmoniques

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le n -ième nombre harmonique par

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

1. Démontrer que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx$$

2. En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$$

3. À l'aide de la relation précédente, démontrer que la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ diverge vers $+\infty$.
4. Démontrer que

$$H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$$

5. On considère désormais les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ définies par

$$u_n = H_n - \ln(n), \quad v_n = H_n - \ln(n+1)$$

6. Démontrer que ces deux suites sont adjacentes.
7. En déduire que ces deux suites convergent vers une même limite positive. Cette limite est notée γ .
8. Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1,

$$0 \leq H_n - \ln(n) - \gamma \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

9. Écrire une fonction Python prenant comme argument un nombre réel ε strictement positif et renvoyant une valeur approchée de γ à ε près. On suppose que l'on dispose de la fonction `math.log()` pour le logarithme népérien.

Partie II : Étude du problème de la collectionneuse

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3. Une élève de 2BCPST2 est passionnée de géologie (ce sont des choses qui arrivent). Chaque jour, elle achète une pochette surprise contenant une carte représentant une roche/un caillou/un minéral pour compléter sa collection dans un album destiné à recevoir toutes les cartes. On suppose qu'il y a n cartes et qu'elles sont toutes équiprobables. L'élève va acheter des cartes jusqu'à ce que sa collection soit complète. Soit $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$. On note T_k la variable aléatoire égale au nombre d'achats effectués par l'élève au moment où sa collection comporte pour la première fois k cartes différents, éventuellement avec des doublons. On note Z_k le nombre d'achats effectués par l'élève entre le moment où sa collection comporte pour la première fois $k-1$ cartes différentes et le moment où sa collection comporte pour la première fois k cartes différentes.

10. En utilisant les notations précédentes, désigner la variable aléatoire qui modélise le nombre d'achats nécessaires pour obtenir l'ensemble de la collection.
11. Déterminer la loi de T_1 .
12. On suppose que q est un entier supérieur ou égal à 2. Calculer la probabilité qu'un collectionneur obtienne toujours la même carte au cours de ses q premiers achats.
13. En déduire que, pour tout $q \geq 1$,

$$\mathbb{P}(T_2 > q) = \frac{1}{n^{q-1}}$$

14. En déduire la loi de T_2 .
15. Dans cette question, on suppose que la collection contient 100 cartes. Calculer le nombre minimal d'achats que l'élève doit effectuer pour que la probabilité d'obtenir deux cartes différentes soit supérieure ou égale à 0,99.
16. Pour tout entier $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, justifier que

$$Z_k = \begin{cases} T_1 & \text{si } k = 1 \\ T_k - T_{k-1} & \text{si } k \geq 2 \end{cases}$$

17. En déduire, pour $k \geq 2$, une expression de T_k en fonction des Z_i .
18. Démontrer que Z_k suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre. En déduire l'espérance et la variance de Z_k .
19. En déduire que

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=1}^n \frac{n}{k} = nH_n$$

20. Donner un équivalent de $\mathbb{E}(T_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
21. Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ une famille de variables aléatoires indépendantes et admettant des variances, par récurrence, démontrer que $\sum_{k=1}^n X_k$ admet une variance et que $\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k)$.
On pourra utiliser comme acquis le cas de la variance de la somme de deux variables aléatoires indépendantes.

On admet que les variables aléatoires $Z_k, 1 \leq k \leq n$, sont mutuellement indépendantes.

22. Exprimer $\mathbb{V}(T_n)$ en fonction de $n, B_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et H_n

23. En déduire que $\mathbb{V}(T_n) \leq \frac{n^2 \pi^2}{6}$

24. Démontrer que, pour tout nombre réel $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}(|T_n - \mathbb{E}(T_n)| \geq \lambda n \ln n) \leq \frac{\pi^2}{6\lambda^2 (\ln n)^2}$$

25. Déterminer un entier n_0 tel que pour tout entier n supérieur ou égal à n_0 ,

$$\mathbb{P}(T_n \geq nH_n + n \ln n) \leq 0,01$$

Partie III : Simulation informatique

On modélise l'album comme une liste de longueur n . Au début, avant l'achat de cartes, l'album est vide, ainsi on remplit initialement la liste de 0. Puis, à chaque achat, si l'élève obtient la carte numéro $i \in \llbracket 0 ; n - 1 \rrbracket$, alors si elle avait déjà la vignette alors elle ne change pas la liste représentant l'album, si elle n'avait pas cette vignette, elle change le 0 qui est à l'indice i dans la liste par un 1.

26. Écrire une fonction `CreationAlbumVide(n)` qui renvoie l'album initialement vide.
27. Écrire une fonction `AchatCartes(n, Album)` qui achète une carte (un entier au hasard dans $\llbracket 0 ; n - 1 \rrbracket$) et modifie et renvoie l'album si l'élève n'a pas cette carte.
28. Écrire une fonction `AlbumRempli(Album)` qui renvoie `True` si l'album est rempli et `False` sinon.
29. On souhaite simuler une session d'achats où l'élève va acheter des cartes tant que sa collection n'est pas complète. On propose le code suivant à compléter :

```
def Session(n):  
    Album = CreationAlbumVide(n)  
    Complet = ...  
    while Complet == ...:  
        Album = AchatCartes(n, Album)  
        Complet =
```

Ajouter aussi des instructions pour que la fonction `Session` renvoie le nombre d'achats nécessaires pour que la collection soit complète.

30. Écrire une fonction `EspéranceApproximée(n, Nb)` qui va effectuer `Nb` sessions et calculer le nombre moyen d'achat nécessaires pour que la collection soit complète sur ces sessions
31. Afficher sur un graphe le nombre moyen d'achat nécessaires sur ces sessions en fonction de n .
32. Afficher le quotient entre ce nombre d'achat nécessaires et l'équivalent de $\mathbb{E}(T_n)$ déterminé à la partie précédente, les résultats sont-ils cohérents ?